Kujawsko-Pomorskie Centrum Edukacji Nauczycieli
w Bydgoszczy
PLACÓWKA AKREDYTOWANA

KRYTERIA OCENIANIA-POZIOM ROZSZERZONY

KPCEN TORUŃ
CENTRUM DOSKONALENIA I EDUKACJI

Zadanie 1. (4 pkt)

Rozwiąż równanie: $2\cos^2 x - 2\cos^2 x \sin x = 1 - \sin x$, w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Przekształcenie równania do postaci: $2\cos^2 x\,(1 - \sin x) - (1 - \sin x) = 0$
2 pkt	Przekształcenie równania do postaci: $(1 - \sin x)(2\cos^2 x - 1) = 0$
3 pkt	Zapisanie alternatywy równań: $$(1 - \sin x) = 0 \ lub \ \left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0 \ lub \ \left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = 0$$
4 pkt	Rozwiązanie równania: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{4}$ lub $x = \frac{5\pi}{4}$ lub $x = \frac{7\pi}{4}$.

Uwaga.

1. Jeśli uczeń poda tylko rozwiązania ogólne, to otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 2. (4 pkt)

Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$.

Zdający otrzymuje:

cz.I	Udowodnienie, że jeżeli czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg, to $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$. $(\Rightarrow)$
1 pkt	Wskazanie równych kątów i stwierdzenie, że trójkąt DSA jest podobny do trójkąta BSC (cecha kk): $\angle ADS = \frac{1}{2}\angle ASB$, $\angle ADS = \angle ACB$, $\angle DSA = \angle BSC$
2 pkt	Wnioskowanie z podobieństwa trójkątów, że $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$.
cz.II	Udowodnienie, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg. $(\Leftarrow)$
3 pkt	Zauważenie, że trójkąt ASD jest podobny do trójkąta BSC oraz trójkąt $DS\,C$ jest podobny do trójkąta BSA (cecha bkb) i wskazanie równych kątów: $\angle CDS = \angle SAB$ i $\angle ABS = \angle DCS$ oraz $\angle CDS = \angle SAB$ i $\angle ABS = \angle DCS$
4 pkt	Zauważenie, że sumy przeciwległych kątów wewnętrznych czworokąta są równe i wnioskowanie na mocy twierdzenia, że na czworokącie można opisać okrąg.

Zadanie 3. (4 pkt)

Dane są funkcje $f(x)=\frac{2x+b}{ax+1}$ oraz $g(x)=\frac{ax+c}{ax+1}$, o których wiadomo, że ich wykresy mają punkt wspólny $P\left(-9,\frac{11}{13}\right)$, a miejscem zerowym funkcji g jest liczba:-$\frac{5}{3}$. Wyznacz wartości parametrów $a,\ b,\ c$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Zapisanie zależności: $c=\frac{5}{3}a$
2 pkt	Zapisanie zależności wynikającej z faktu, że punkt P należy do funkcji g: $\frac{11}{13}=\frac{-9a+c}{-9a+1}$
3 pkt	Rozwiązanie układu równań $g(-\frac{5}{3})=0$ i $g(-9)=\frac{11}{13}$: $a=3, c=5$.
4 pkt	Zapisanie zależności wynikającej z faktu, że punkt P należy do funkcji f i obliczenie $b=-4$.

Uwaga.

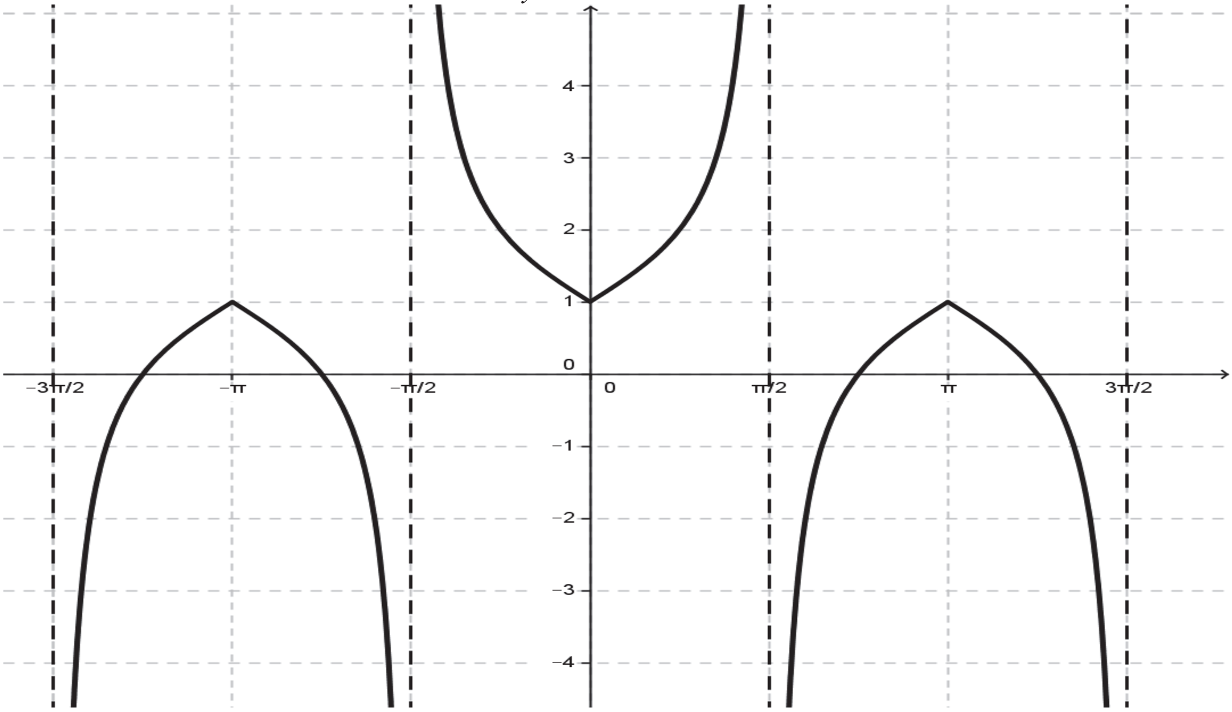
1. Jeśli uczeń zapisze tylko $g(-\frac{5}{3})=0$ i $f(-9)=g(-9)=\frac{11}{13}$ i na tym poprzestanie za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.

Zadanie 4. (4 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x)=\frac{\cos x+|\sin x|}{\cos x}$ dla $x\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności $0\le f(x)<2$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $$f(x)=\begin{cases}1+tgx;\ x\in\left(-\frac{3}{2}\pi,-\pi\right\rangle\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle\\1-tgx;\ x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right\rangle\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)\end{cases}$$
3 pkt	Naszkicowanie wykresu funkcji: patrz rysunek
4 pkt	Podanie zbioru rozwiązań nierówności $0\le f(x)<2$: $$x\in\left\langle-\frac{5}{4}\pi,-\frac{3}{4}\pi\right\rangle\cup\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left\langle\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right\rangle$$



Uwaga.
1.Jeśl uczeń błędnie narysuje wykres tylko w jednym z przedziałów i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy merytoryczne, to za całe zadanie otrzymuje 2 punkty.
2. Jeśli uczeń błędnie narysuje wykres tylko w jednym z przedziałów i konsekwentnie poda zbiór rozwiązań nierówności, to za całe zadanie otrzymuje 3 punkty.

Zadanie 5. (4 pkt)
Suma trzech liczb będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego jest równa 52. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 2, do drugiej12, a do trzeciej 6, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznacz ten ciąg.
Zdający otrzymuje:

Schemat 1

1 pkt	$a_1, a_{2,} a_3$-wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego, $a_1 + 2, a_2 + 12, a_3 + 6$-wyrazy ciągu arytmetycznego Zapisanie zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego: $(a_2 + 12) - (a_1 + 2) = (a_3 + 6) - (a_2 + 12).$
2 pkt	Zapisanie układu równań z wykorzystaniem definicji lub wzoru ogólnego ciągu geometrycznego i arytmetycznego.
3 pkt	Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = \frac{1}{3}$ lub $q = 3$.
4 pkt	Odrzucenie $q = \frac{1}{3}$ i podanie wyrazów szukanego ciągu: $4, 12, 36$.

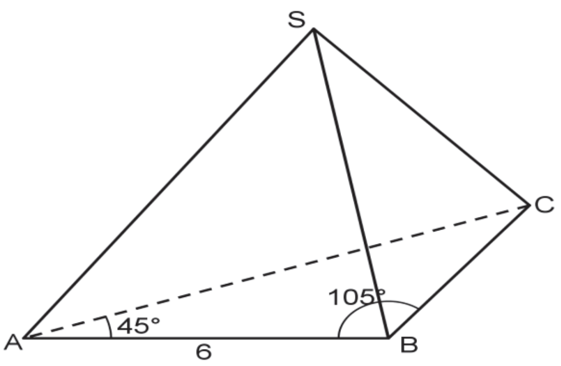
Schemat 2

1 pkt	x, y, z –wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego Zapisanie zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego: $(y + 12) - (x + 2) = (z + 6) - (y + 12).$

2 pkt	Zapisanie układu równań z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego i arytmetycznego, np. $\begin{cases} x+y+z=52 \\ y^2=xz \\ (y+12)-(x+2)=(z+6)-(y+12) \end{cases}$
3 pkt	Obliczenie $y=12$.
4 pkt	Doprowadzenie do równania z jedną niewiadomą, np.: $x^2-40x+144=0$ i podanie wyrazów szukanego ciągu: $4, 12, 36$.

Zadanie 6. (5 pkt)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego jeden z boków ma długość 6, a kąty do niego przyległe mają miary 45° i 105°. Wysokość ostrosłupa ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na podstawie. Oblicz objętość ostrosłupa. Wynik podaj w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.



Zdający otrzymuje:

1 pkt	Obliczenie $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2 pkt	Skorzystanie z twierdzenia sinusów i obliczenie długości boku leżącego naprzeciw kąta 105°: $x=3\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.
3 pkt	Obliczenie z twierdzenia sinusów długości promienia okręgu opisanego na podstawie: $R=H=6$.
4 pkt	Obliczenie pola podstawy trójkąta: $P=9\sqrt{3}+9$.
5 pkt	Obliczenie objętości: $V=18\sqrt{3}+18$.

Uwaga.

1. Jeśli uczeń prowadzi poprawne rozumowanie, ale w rozwiązaniu korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych za całe zadanie otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 7. (4 pkt)

Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia $n > 2$, którego suma wszystkich współczynników jest równa 4, a suma współczynników przy potęgach o wykładnikach nieparzystych jest równa sumie współczynników przy potęgach o wykładnikach parzystych. Wykaż, że reszta $R(x)$ z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x) = (x+1)(x-1)$ jest równa $R(x) = 2x + 2$.

Zdający otrzymuje::

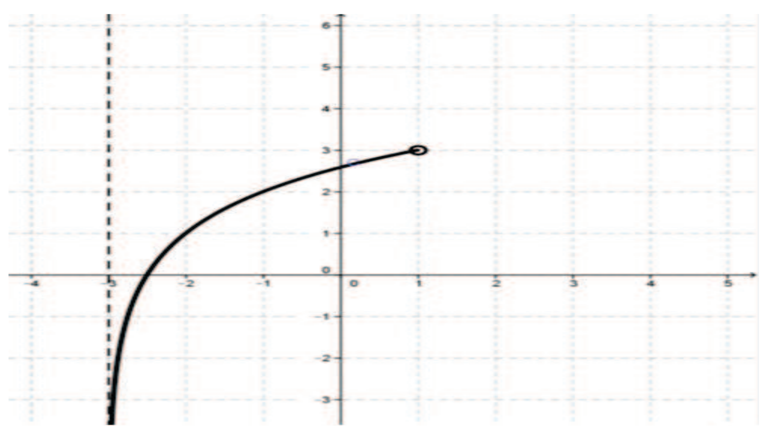
1 pkt	Zapisanie układu warunku: $w(1) = 4$
2 pkt	Zapisanie układu warunków: $w(1) = 4$ i $w(-1) = 0$.
3 pkt	Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian i zapisanie warunku $R(1) = 4$ i $R(-1) = 0$, gdzie $R(x) = ax + b$. (lub $R(1) = w(1)$ i $R(-1) = w(-1)$)
4 pkt	Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a+b=4 \\ -a+b=0 \end{cases}$: *a=2, b=2* i zapisanie $R(x) = 2x + 2$.

Zadanie 8. (5 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = log_2(-x^3 - 5x^2 - 3x + 9) - log_2\left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Rozłożenie wielomianu na czynniki: $w(x) = -x^3 - 5x^2 - 3x + 9 = -(x-1)(x+3)^2$
2 pkt	Rozwiązanie nierówności: $-x^3 - 5x^2 - 3x + 9 > 0$: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 1)$
3 pkt	Rozwiązanie nierówności $-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} > 0$ i podanie dziedziny funkcji f: $D = (-3, 1)$
4 pkt	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = log_2(x+3) + 1$
5 pkt	Naszkicowanie wykresu funkcji:



Uwaga.
1.Jeśli uczeń doprowadzi wzór funkcji do postaci $f(x)=\log_2(2x+6)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy otrzymuje 4 punkty.
2. Jeśli uczeń doprowadzi wzór funkcji do postaci $f(x)=\log_2(2x+6)$ i na jego podstawie sporządzi wykres będący wykresem funkcji $f(x)=\log_2(x+3)+1$(wskaże asymptotę) otrzymuje 5 punków
3.Jeśli uczeń doprowadzi wzór funkcji do postaci $f(x)=\log_2(2x+6)$ i na jego podstawie sporządzi wykres, ale nie wskaże asymptoty x=-3 otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 9. (4 pkt)
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.
Zdający otrzymuje:

1 pkt	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{8}{4}$
2 pkt	Zapisanie zdarzenia $A = A_1 \cup A_2$, gdzie zdarzenie A_1 polega na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą jest 3, zdarzenie A_2 polega na tym, że największą wylosowaną liczbą jest 7 i podanie liczby zdarzeń sprzyjających: $\overline{\overline{A_1}} = \binom{5}{3}$ i $\overline{\overline{A_2}} = \binom{6}{3}$.
3 pkt	Podanie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu$A_1 \cap A_2$: $\overline{\overline{A_1 \cap A_2}} = \binom{3}{2}$.
4 pkt	Obliczenie $P(A) = \frac{27}{70}$.

Uwaga.
1. Jeśli uczeń otrzyma *P(A)>1* za całe zadanie otrzymuje 0 punktów.

Zadanie 10. (5 pkt)
Punkty $B = (5,6)$ i $C = (0,6)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego podstawy AB i CD są prostopadłe do prostej k o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu, wiedząc, że punkt D należy do prostej k.

Zdający otrzymuje:

1 pkt	Wyznaczenie równania prostej $CD: y = 2x + 6$.
2 pkt	Obliczenie współrzędnych punktu $D: D = (-2,2)$
3 pkt	Wyznaczenie równania prostej $AB: y = 2x - 4$.
4 pkt	Zapisanie równania wynikającego z zależności $\lvert AD\rvert = \lvert DC\rvert$: $$\sqrt{(x+2)^2 + (2x-6)^2} = 5$$
5 pkt	Obliczenie współrzędnych punktu $A: A = (1,-2)$ lub $A = (3,2)$

Zadanie 11. (3 pkt)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b, c \in R$ zachodzi nierówność
$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$.

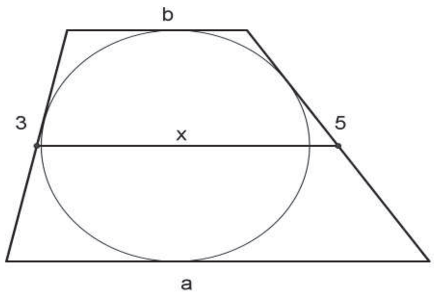
Zdający otrzymuje:

1 pkt	Pogrupowanie wyrazów do postaci: $(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + 3(c^2 - 2c + 1) \geq 0$
2 pkt	Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia i zapisanie: $(a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 \geq 0$
3 pkt	Uzasadnienie: Kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną oraz suma liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną.

Zadanie 12. (4 pkt)

W trapezie opisanym na okręgu boki nierównoległe mają długości 3 i 5, zaś odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie części, których pola są w stosunku $5:11$. Oblicz długości podstaw trapezu.

Zdający otrzymuje:



1 pkt	Zastosowanie twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i zapisanie: $a + b = 8$
2 pkt	Wyznaczenie długości odcinka łączącego środki nierównoległych boków trapezu: $x = \frac{a+b}{2} = 4$
3 pkt	Zapisanie stosunku pól obu części: $\frac{\frac{b+4}{2}}{\frac{a+4}{2}} = \frac{5}{11}$
4 pkt	Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a+b=8 \\ \dfrac{\frac{b+4}{2}}{\frac{a+4}{2}} = \dfrac{5}{11} \end{cases}$: $a = 7,\ b = 1$.