

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	**C**	**D**	**A**	**A**	**B**	**D**	**C**	**C**	**D**	**B**	**C**	**A**	**B**	**B**	**D**	**B**	**C**	**A**	**A**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. ***(2pkt)***

Rozwiąż nierówność $-2x^2+3x+2\le 0$.

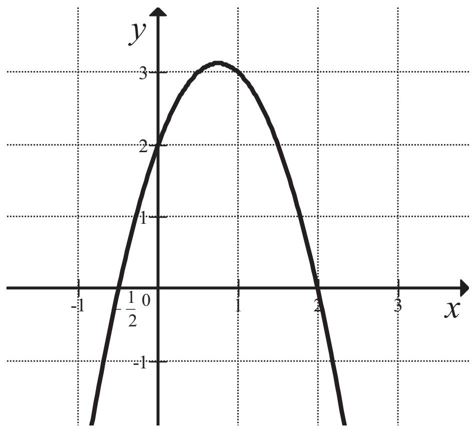
Rozwiązanie

Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2+3x+2$

$$\Delta = 9-4\cdot(-2)\cdot 2 = 25,\ \sqrt{\Delta}=5,$$

$$x_1=\frac{-3-5}{-4}=2,\ x_2=\frac{-3+5}{-4}=-\frac{1}{2}.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=-2x^2+3x+2$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in\left(-\infty,-\tfrac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2,+\infty\right).$$

<u>**Schemat oceniania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x-\frac{3}{4}\right|\ge\frac{5}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x-\frac{3}{4}\right|\le\frac{5}{4}$

  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2,+\infty\right)$ lub $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 2,+\infty\right)$ lub ($x\le-\frac{1}{2}$ lub $x\ge 2$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x\le-\frac{1}{2}$, $x\ge 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 22. ***(2 pkt)***
Oblicz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=-2x^2+16x-15$ w przedziale $\langle -2,3\rangle$.

Rozwiązanie
Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f* jest równa

$$x_w=-\frac{b}{2a}=-\frac{16}{2\cdot(-2)}=4.$$

Stąd i z ujemnego znaku współczynnika stojącego przy x^2 wnioskujemy, że w przedziale $\langle -2,3\rangle$ funkcja *f* jest rosnąca. Zatem największa wartość funkcji *f* w tym przedziale jest równa

$$f(3)=-2\cdot 3^2+16\cdot 3-15=-18+48-15=15.$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji *f* w przedziale $\langle -2,3\rangle$ jest równa 15.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*

albo

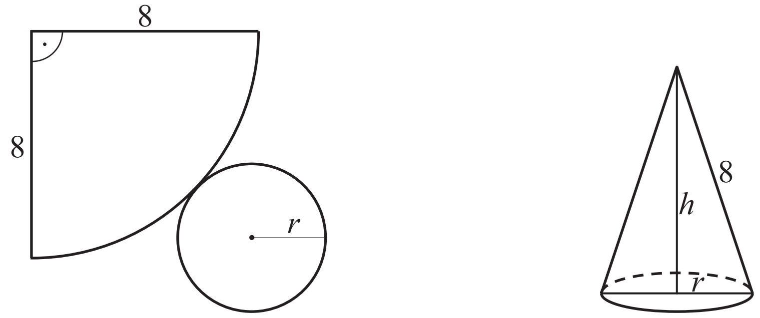
- zapisze wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej i stwierdzi, że w przedziale $\langle -2,3\rangle$ funkcja jest rosnąca (wystarczy, że stwierdzi, że jest monotoniczna, o ile w dalszej części rozwiązania oblicza wartości na obu krańcach przedziału $\langle -2,3\rangle$)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy największą wartość funkcji w przedziale $\langle -2,3\rangle$: 15.

Zadanie 23. ***(2pkt)***
Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

Rozwiązanie



Ponieważ powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm, więc pole powierzchni bocznej stożka jest równe $\frac{1}{4}\pi \cdot 8^2 = 16\pi$.

Zatem ze wzoru na pole powierzchni bocznej stożka otrzymujemy $\pi r \cdot 8 = 16\pi$. Stąd $r = 2$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $h = \sqrt{8^2 - r^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Odpowiedź: Wysokość stożka jest równa $2\sqrt{15}$ cm.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze związek pozwalający obliczyć promień podstawy stożka, np. wykorzysta wzór na pole powierzchni bocznej stożka i zapisze równanie $\pi r \cdot 8 = \frac{1}{4}\pi \cdot 8^2$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy wysokość stożka: $h = 2\sqrt{15}$.

Zadanie 24. ***(2pkt)***
Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$.

Rozwiązanie
Po zastosowaniu wzoru na kwadrat sumy i wykonaniu redukcji otrzymujemy

$$-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = -9 - \left(4 + 4\sqrt{3} + 3\right) = -16 - 4\sqrt{3} = -4^2 - 4\sqrt{3}.$$

Zatem liczba $-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ jest czwartym wyrazem ciągu (a_n).

Odpowiedź: $-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = a_4$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy poprawnie zastosuje wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy: $-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = -9 - \left(4 + 4\sqrt{3} + 3\right)$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy doprowadzi wyrażenie $-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$ do postaci $-16 - 4\sqrt{3}$ i zapisze, że

$-3^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = a_4$.

Zadanie 25. ***(2pkt)***
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x+y+z=3$ prawdziwa jest nierówność $x^2+y^2+z^2 \geq 3$.

Dowód
I sposób rozwiązania
Z założenia $x+y+z=3$ otrzymujemy $z=3-(x+y)$. Wobec tego tezę możemy zapisać w sposób równoważny

$$x^2+y^2+\left(3-(x+y)\right)^2 \geq 3,$$
$$x^2+y^2+9-6(x+y)+(x+y)^2 \geq 3,$$
$$x^2+y^2+9-6x-6y+x^2+2xy+y^2 \geq 3,$$
$$2x^2+2xy+2y^2-6x-6y+6 \geq 0$$
$$x^2+xy+y^2-3x-3y+3 \geq 0,$$
$$x^2+(y-3)x+\left(y^2-3y+3\right) \geq 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób nierówność kwadratową z niewiadomą x. Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie tej nierówności jest równy

$$\Delta=(y-3)^2-4\cdot 1\cdot\left(y^2-3y+3\right)=y^2-6y+9-4y^2+12y-12=$$
$$=-3y^2+6y-3=-3\left(y^2-2y+1\right)=-3(y-1)^2 \leq 0 \text{ dla każdej } y \in R.$$

To, wraz z dodatnim współczynnikiem przy x^2 oznacza, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla dowolnej liczby $x \in R$.

<u>Uwaga</u>
Prawdziwość otrzymanej nierówności $x^2+xy+y^2-3x-3y+3 \geq 0$ możemy też udowodnić zapisując ją w postaci równoważnej jej nierówności prawdziwej w sposób oczywisty.
Pokażemy dwa takie sposoby:

a)
$$x^2+xy+y^2-3x-3y+3 \geq 0,$$
$$\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)+xy-x-y+1 \geq 0,$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+x(y-1)-(y-1) \geq 0,$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1) \geq 0,$$
$$(x-1)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}\cdot(y-1)^2+\frac{3}{4}\cdot(y-1)^2 \geq 0,$$
$$\left((x-1)+\frac{1}{2}(y-1)\right)^2+\frac{3}{4}\cdot(y-1)^2 \geq 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

b)
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1) \geq 0,$$
$$\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2 \geq 0,$$
$$\frac{1}{2}\left((x-1)^2+2(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2 \geq 0$$
$$\frac{1}{2}(x-1+y-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2 \geq 0.$$

Podobnie jak poprzednio uzyskujemy nierówność prawdziwą w sposób oczywisty.

II sposób rozwiązania

Podstawiając $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$ możemy zapisać założenie w postaci $(a+1)+(b+1)+(c+1)=3$, czyli $a+b+c=0$, zaś tezę możemy zapisać w sposób równoważny w postaci kolejno:

$$(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2\geq 3,$$
$$a^2+2a+b^2+2b+c^2+2c\geq 0,$$
$$a^2+b^2+c^2\geq -2(a+b+c).$$

Ostatnia nierówność jest, wobec założenia $a+b+c=0$, równoważna nierówności

$$a^2+b^2+c^2\geq 0,$$

która jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych.

III sposób rozwiązania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwe są nierówności

$$(x-y)^2\geq 0,$$
$$(y-z)^2\geq 0,$$
$$(z-x)^2\geq 0,$$

czyli

$$x^2+y^2\geq 2xy,$$
$$y^2+z^2\geq 2yz,$$
$$z^2+x^2\geq 2zx.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy

$$2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx.$$

Ponieważ z założenia $x+y+z=3$, więc

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=9.$$

Stąd

$$2xy+2yz+2zx=9-\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Otrzymujemy zatem

$$2x^2+2y^2+2z^2\geq 9-\left(x^2+y^2+z^2\right),$$
$$3x^2+3y^2+3z^2\geq 9,$$
$$x^2+y^2+z^2\geq 3,$$

co należało udowodnić.

IV sposób rozwiązania

Dla liczb nieujemnych x, y, z prawdziwa jest nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową

$$\frac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Jeżeli natomiast któraś z liczb x, y, z jest ujemna, to ta nierówność również jest prawdziwa. Stąd i z założenia, że $x+y+z=3$ dostajemy

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geq 1.$$

Podnosząc obie strony te nierówności do kwadratu, a następnie mnożąc je przez 3 dostajemy tezę.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- zapisze nierówność w postaci równoważnej jej nierówności kwadratowej $x^2+\left(y-3\right)x+\left(y^2-3y+3\right)\geq 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność to nierówność kwadratowa lub obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2+\left(y-3\right)x+\left(y^2-3y+3\right)$

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(x-1\right)\left(y-1\right)\geq 0$

albo

- zastosuje podstawienie $x=a+1$, $y=b+1$, $z=c+1$ i zapisze założenie w postaci $a+b+c=0$ oraz tezę w postaci $\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2+\left(c+1\right)^2\geq 3$

albo

- zapisze równość $2xy+2yz+2zx=9-\left(x^2+y^2+z^2\right)$ wynikająca z założenia oraz wykaże prawdziwość nierówności $2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$ (wystarczy, że powoła się na znaną nierówność , prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych *x*, *y*, *z*)

albo

- zastosuje nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową i zapisze nierówność $\frac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ (nawet bez rozpatrywania znaków liczb *x*, *y*, *z*)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

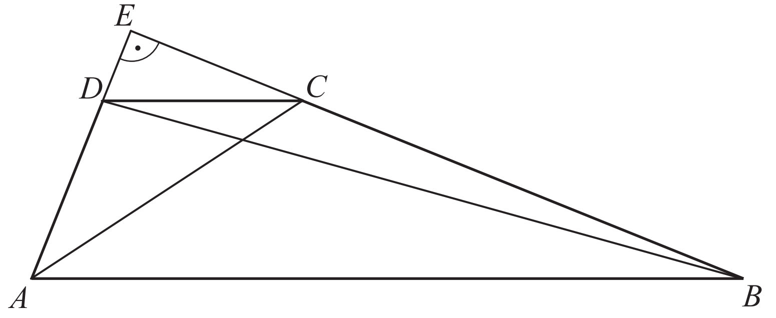
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 26. ***(2pkt)***

Wykaż, że jeżeli ramiona *AD* i *BC* trapezu *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* zawierają się w prostych prostopadłych (zobacz rysunek), to $\left|AB\right|^2+\left|CD\right|^2=\left|AC\right|^2+\left|BD\right|^2$.

Rozwiązanie

Niech *E* oznacza punkt przecięcia prostych *AD* i *BC* (przyjęliśmy za rysunkiem, że $\left|AB\right|>\left|CD\right|$. Gdyby $\left|AB\right|<\left|CD\right|$, to punkt *E* leżałby po drugiej stronie prostej *CD*, zaś rozumowanie nie zmieniłoby się).



Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego kolejno do trójkątów *ABE*, *DCE*, *ACE*, *BED* otrzymujemy równości

(1) $$|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2,$$

(2) $$|CD|^2=|DE|^2+|CE|^2,$$

(3) $$|AC|^2=|AE|^2+|CE|^2,$$

(4) $$|BD|^2=|DE|^2+|BE|^2.$$

Zatem

$$|AB|^2+|CD|^2\overset{(1),(2)}{=}\left(|AE|^2+|BE|^2\right)+\left(|DE|^2+|CE|^2\right)=$$

$$=\left(|AE|^2+|CE|^2\right)+\left(|DE|^2+|BE|^2\right)\overset{(3),(4)}{=}|AC|^2+|BD|^2.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze równości wynikające z twierdzenia Pitagorasa pozwalające udowodnić tezę, np.: $|AB|^2=|AE|^2+|BE|^2$, $|CD|^2=|DE|^2+|CE|^2$, $|AC|^2=|AE|^2+|CE|^2$, $|BD|^2=|DE|^2+|BE|^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 27. ***(4pkt)***

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki:

(1) liczba jest podzielna przez 25,
(2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste,
(3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

Rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest wylosowanie liczby naturalnej czterocyfrowej, więc zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać $\Omega=\{1000,1001,1002,\ldots,9999\}$. Liczba wszystkich liczb w tym zbiorze jest równa

$$|\Omega|=9999-999=9000.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba ze zbioru Ω spełnia jednocześnie warunki (1), (2) i (3). Liczba jest podzielna przez 25, więc jej dwucyfrowa końcówka to 00, 25, 50 lub 75. Ponieważ z (2) warunku wynika, że cyfra dziesiątek jest nieparzysta, więc końcówką może być jedynie 50 lub 75. Cyfra setek jest nieparzysta i cyfra dziesiątek jest od niej nie większa. Mamy zatem następujące trzycyfrowe końcówki liczby: 550, 750, 950, 775, 975. Cyfrą tysięcy jest dowolną cyfrą spośród dziewięciu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Zatem

$$|A|=9\cdot 5.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{9\cdot 5}{9000}=\frac{1}{200}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

- Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=9000$

albo

- poprawne rozpatrzenie jednego z podanych warunków, np. obliczenie liczby wszystkich końcówek dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 25 lub ich wypisanie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

- Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz poprawne rozpatrzenie jednego z podanych warunków, np. obliczenie liczby wszystkich końcówek dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 25 lub ich wypisanie

albo

- poprawne rozpatrzenie co najmniej dwóch warunków ale nie obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie jej z błędem.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=9\cdot 5$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

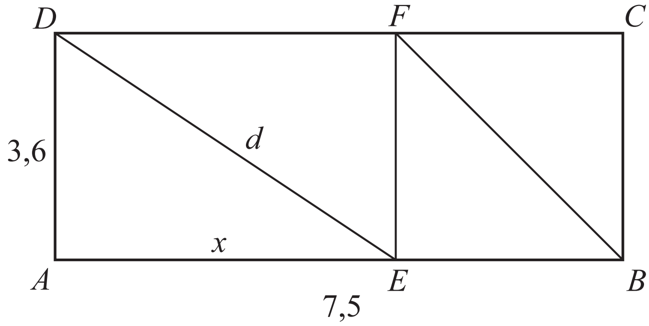
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{1}{200}$.

Zadanie 28. ***(5pkt)***

Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x nieznany wymiar większego z kawałków. Przekątna tego kawałka jest dłuższa od przekątnej mniejszego z kawałków.



Nieznany wymiar mniejszego kawałka i długość przekątnej tego kawałka są równe odpowiednio

$$|EB| = 7,5 - x,\ |FB| = d - 1,5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED i dla trójkąta EBF otrzymujmy

$$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 \text{ oraz } |FB|^2 = |EB|^2 + |EF|^2,$$

$$d^2 = 3,6^2 + x^2 \text{ oraz } (d - 1,5)^2 = (7,5 - x)^2 + 3,6^2.$$

Drugie równanie zapisujemy w postaci

$$d^2 - 3d + 2,25 = 56,25 - 15x + x^2 + 3,6^2.$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$d^2 - 3d + 2,25 = 56,25 - 15x + d^2,$$

$$15x - 3d = 54,$$

$$5x - d = 18,$$

$$d = 5x - 18.$$

Podstawiając w miejsce d w pierwszym równaniu $5x - 18$ otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$(5x - 18)^2 = 3,6^2 + x^2,$$

$$25x^2 - 180x + 324 = 12,96 + x^2,$$

$$24x^2 - 180x + 311,04 = 0.$$

$$\Delta = (-180)^2 - 4 \cdot 24 \cdot 311,04 = 180 \cdot 180 - 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 311,04 =$$

$$= 4 \cdot 45 \cdot 4 \cdot 45 - 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 311,04 = 16 \cdot (45 \cdot 45 - 6 \cdot 311,04) = 16 \cdot 158,76,$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{158,76} = 4 \cdot 12,6 = 50,4$$

$$x = \frac{180 - 50,4}{48} = \frac{129,6}{48} = 2,7 \text{ lub } x = \frac{180 + 50,4}{48} = \frac{230,4}{48} = 4,8.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, gdyż wówczas mielibyśmy $d = 5x - 18 = 5 \cdot 2,7 - 18 = -4,5 < 0$.

Zatem wymiary większego z otrzymanych kawałków są równe 3,6 m na 4,8 m.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Przyjęcie oznaczeń i zapisanie jednego z równań wynikających z treści zadania, np.:
$d^2 = 3,6^2 + x^2$, gdzie x oznacza nieznany wymiar większego z kawałków, zaś d długość przekątnej tego kawałka.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć wymiary większego z kawałków, np.:

$$\begin{cases} d^2 = 3,6^2 + x^2 \\ (d - 1,5)^2 = 3,6^2 + (7,5 - x)^2 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Doprowadzenie układu do równania z jedną niewiadomą (x albo d), np.: $(5x - 18)^2 = 3,6^2 + x^2$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą (x albo d), np.:
$24x^2 - 180x + 311,04 = 0$.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt

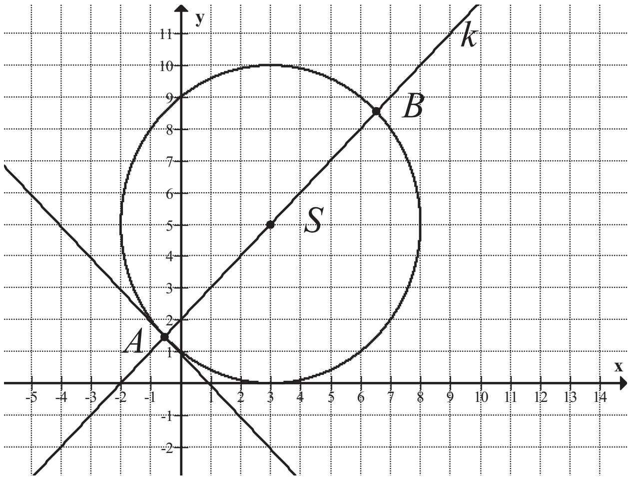
Obliczenie nieznanego wymiaru większego kawałka: 4,8 m.

Zadanie 29. ***(4pkt)***

Prosta o równaniu $y=x+2$ przecina okrąg o równaniu $\left(x-3\right)^2+\left(y-5\right)^2=25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu, przechodzącej przez jeden z tych punktów.

Rozwiązanie

Środkiem okręgu o równaniu $\left(x-3\right)^2+\left(y-5\right)^2=25$ jest punkt $S=\left(3,5\right)$, a promień tego okręgu jest równy $r=5$. Narysujmy ten okrąg wraz z prostą *k* o równaniu $y=x+2$.



Współrzędne punktów przecięcia prostej *k* z okręgiem obliczmy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}\left(x-3\right)^2+\left(y-5\right)^2=25\\ y=x+2\end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\left(x-3\right)^2+\left(x+2-5\right)^2=25,$$

$$\left(x-3\right)^2+\left(x-3\right)^2=25,$$

$$2\left(x-3\right)^2-25=0,$$

$$\left(x-3\right)^2-\frac{25}{2}=0,$$

$$\left(x-3-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(x-3+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=0,$$

$$x=3+\frac{5}{\sqrt{2}} \text{ lub } x=3-\frac{5}{\sqrt{2}}$$

Gdy $x=3+\frac{5}{\sqrt{2}}$, to wtedy $y=x+2=5+\frac{5}{\sqrt{2}}$, a gdy $x=3-\frac{5}{\sqrt{2}}$, to wówczas $y=x+2=5-\frac{5}{\sqrt{2}}$.
Zatem prosta *k* przecina okrąg w punktach

$$A=\left(3-\frac{5}{\sqrt{2}},5-\frac{5}{\sqrt{2}}\right),\ B=\left(3+\frac{5}{\sqrt{2}},5+\frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

Zauważmy, że środek S okręgu leży na prostej *k*, gdyż $3+2=5$. Oznacza to, że styczna do okręgu przechodząca przez punkt A lub przez punkt B jest prostopadła do prostej *k*. Równanie stycznej do okręgu przechodzącej przez A ma zatem postać

$$y=-\left(x-\left(3-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right)+5-\frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } y=-x+8-5\sqrt{2}.$$

Równanie stycznej do okręgu przechodzącej przez B ma postać

$$y=-\left(x-\left(3+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right)+5+\frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } y=-x+8+5\sqrt{2}.$$

Odpowiedź. $A=\left(3-\frac{5}{\sqrt{2}},5-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $B=\left(3+\frac{5}{\sqrt{2}},5+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, styczna do danego okręgu poprowadzona przez punkt A ma równanie $y=-x+8-5\sqrt{2}$, a styczna poprowadzona przez punkt B ma równanie $y=-x+8+5\sqrt{2}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Doprowadzenie układu równań $(x-3)^2+(y-5)^2=25$ i $y=x+2$ do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.: $(x-3)^2+(x+2-5)^2=25$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Rozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktów A i B:

$A=\left(3-\frac{5}{\sqrt{2}},5-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $B=\left(3+\frac{5}{\sqrt{2}},5+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A lub przez punkt B: -1.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

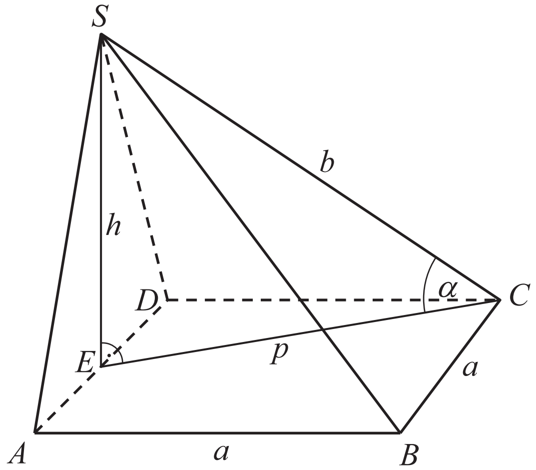
Wyznaczenie równania stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A (lub przez punkt B): $y=-x+8-5\sqrt{2}$ (lub $y=-x+8+5\sqrt{2}$).

Zadanie 30. ***(5pkt)***

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest kwadrat *ABCD*. Wysokość *SE* ściany bocznej *ADS* jest jednocześnie wysokością ostrosłupa, a punkt *E* jest środkiem krawędzi *AD* (zobacz rysunek). Pole ściany *ADS* jest równe 12 cm^2, a objętość ostrosłupa jest równa 48 cm^3. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej *CS* do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Wynik zaokrąglij do $1°$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zaznaczmy też kąt α między krawędzią boczną *CS* ostrosłupa a płaszczyzną jego podstawy. Jest to kąt ostry w trójkącie prostokątnym *ECS* o kącie prostym przy wierzchołku *E*.



Pole ściany bocznej *ADS* jest równe 12, więc możemy zapisać równanie

$$\frac{1}{2}ah = 12.$$

Wykorzystując podaną objętość ostrosłupa zapisujemy drugie równanie z tymi samymi niewiadomymi a i h

$$\frac{1}{3}a^2h = 48.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $ah = 24$, więc stąd i z drugiego równania dostajemy

$$\frac{1}{3}\cdot a \cdot 24 = 48,$$

$$a = 6.$$

Zatem $6h = 24$, czyli $h = 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego *EDC* otrzymujemy

$$|EC|^2 = |ED|^2 + |CD|^2,$$

$$p^2 = 3^2 + 6^2 = 45.$$

Stąd $p = 3\sqrt{5}$.

Obliczmy tangens kąta α w trójkącie *ECS*

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{p} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 0{,}5963.$$

Z tablic odczytujemy miarę kąta α zaokrągloną do $1°$

$$\alpha \approx 31°.$$

Odpowiedź: $\alpha \approx 31°$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $\frac{1}{2}ah=12$, $\frac{1}{3}a^2h=48$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa, zaś h wysokość ostrosłupa i jednocześnie wysokość ściany bocznej *ADS*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokość ostrosłupa: $\frac{1}{2}ah=12$ oraz $\frac{1}{3}a^2h=48$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zaznaczenie kąta nachylenia krawędzi bocznej *CS* do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa i wysokości ostrosłupa: $a=6$, $h=4$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zaznaczy zły kąt nachylenia krawędzi bocznej *CS* do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to za całe rozwiązanie zadania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta α i błędne odczytanie miary kąta

albo

- obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta α z błędem rachunkowym i konsekwentne podanie miary kąta α.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt

Odczytanie miary kąta α: $\alpha \approx 31°$.