Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

OKE ŁÓDŹ
CKE

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ NR 1

Czas pracy 150 minut

MARZEC
ROK 2008

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. *(5 pkt)*

Punkty $A=(-2,12)$ i $B=(6,-2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta, wiedząc, że leży on na prostej o równaniu $x+3y=22$. Sporządź rysunek w prostokątnym układzie współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Wypełnia egzaminator!	**Nr czynności**	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**
	Maks. liczba pkt	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
	Uzyskana liczba pkt					

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x \in R \setminus \{0\}$, gdzie $a \neq 0$, przesunięto o wektor $\vec{u}=[-3,2]$ i otrzymano wykres funkcji g. Do wykresu funkcji g należy punkt $A=(-4,6)$. Oblicz a, następnie rozwiąż nierówność $g(x)<4$.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 3. *(5 pkt)*

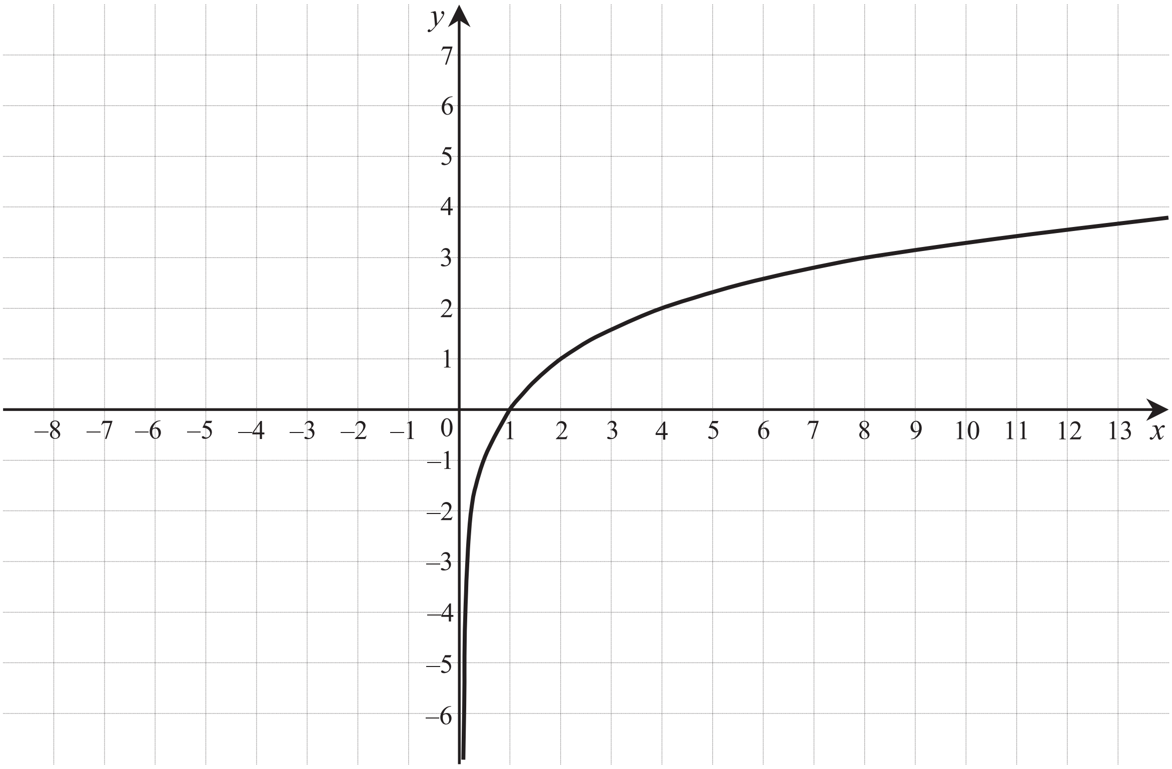
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.

a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.

b) Oblicz $f(0{,}125)$.

c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = |f(x-4)|$.

d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

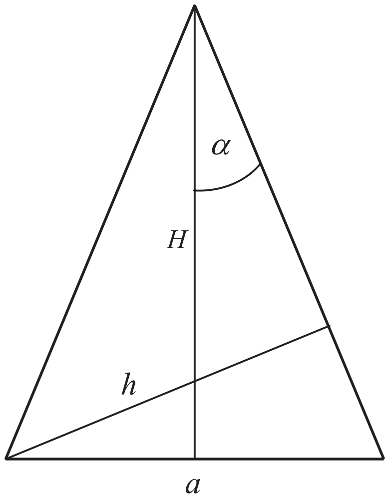
Zadanie 4. *(6 pkt)*

W trójkącie równoramiennym (patrz rysunek) długość podstawy wynosi a, zaś wysokości opuszczone odpowiednio na podstawę i ramię są równe H i h. Kąt między ramieniem trójkąta i wysokością opuszczoną na podstawę ma miarę α.

a) Wyraź $\text{tg}\alpha$ w zależności od wielkości a i H.

b) Wyraź $\cos\alpha$ w zależności od wielkości a i h.

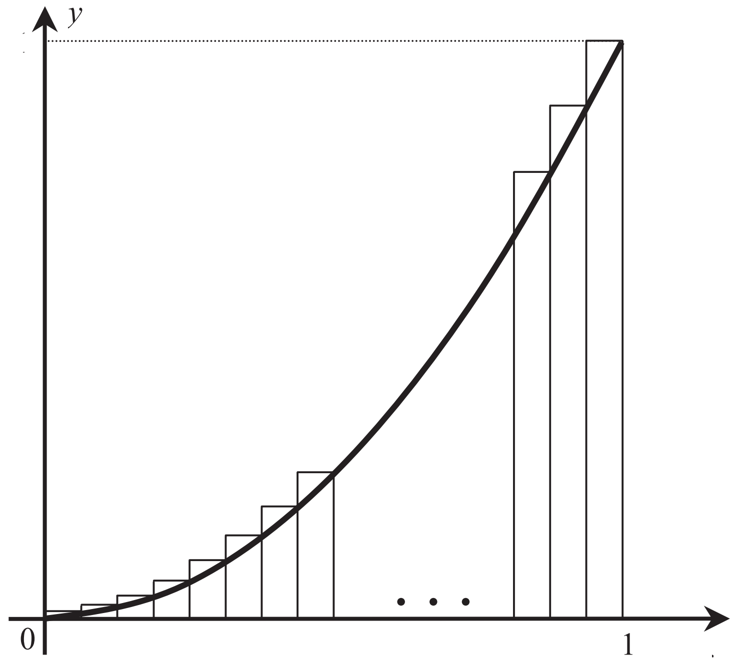
c) Wykaż, że jeśli $a^2 = H \cdot h$, to $\sin\alpha = \sqrt{2} - 1$.



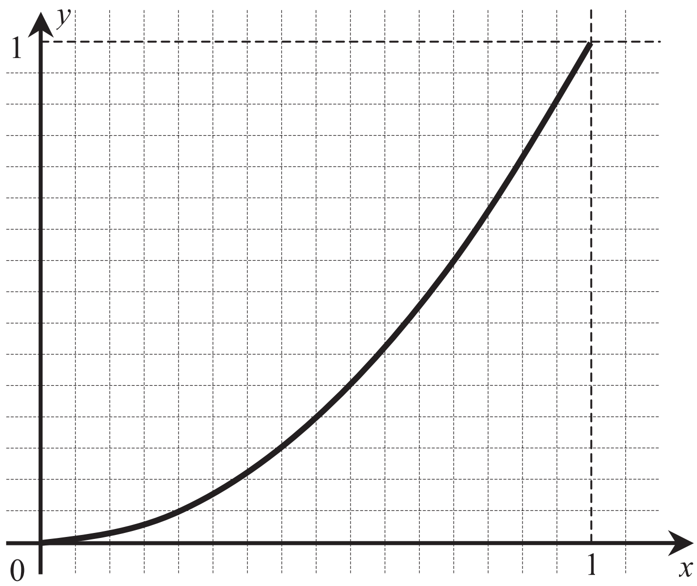
Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5.	4.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 5. *(4 pkt)*

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = x^2$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ i osią Ox możemy obliczyć z dowolną dokładnością, zwiększając liczbę n prostokątów o szerokości $\frac{1}{n}$ każdy (patrz rysunek) i sumując ich pola.



a) Przedstaw ilustrację graficzną takiej sytuacji dla $n = 4$ i oblicz sumę pól otrzymanych prostokątów.



b) Oblicz sumę S_n pól n prostokątów, wykorzystując wzór:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator!</td><td>Nr czynności</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>5.3.</td><td>5.4.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 6. *(3 pkt)*

Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	6.1.	6.2.	6.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 7. *(6 pkt)*

Dana jest funkcja $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ dla $x \in R$.

a) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

b) Wyznacz największą wartość funkcji *f*.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.	7.5.	7.6.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt						

Zadanie 8. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości $\sqrt{2}$. Wszystkie ściany boczne są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi. Punkt P został wybrany wewnątrz ostrosłupa w ten sposób, że wysokości ostrosłupów $ABDP$, $BCDP$, $ACDP$, $ABCP$ opuszczone z wierzchołka P mają tę samą długość H. Sporządź rysunek ostrosłupa i oblicz H.

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator!</td><td>Nr czynności</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>8.3.</td><td>8.4.</td><td>8.5.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Grupa 4 kobiet i 4 mężczyzn, w tym jedno małżeństwo, wybrała się na pieszą wycieczkę. Na wąskiej ścieżce musieli iść gęsiego tzn. jedno za drugim. Zakładamy, że wszystkie możliwe ustawienia tych osób są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem. Sprawdź, czy to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,001.

Wypełnia egzaminator!	**Nr czynności**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**9.4.**
	Maks. liczba pkt	**1**	**1**	**1**	**1**
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest ciąg $x_n = -1 - n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (y_n) ma tę własność, że dla każdego $n \geq 1$ punkty o współrzędnych $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$ leżą na jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu (y_n).

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	10.1.	10.2.	10.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Długości boków trójkąta prostokątnego są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	11.1.	11.2.	11.3.	11.4.	11.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

BRUDNOPIS