gazeta EDUKACJA

GazetaEdukacja.pl

PONIEDZIAŁEK 6 PAŹDZIERNIKA 2008

DODATEK DO „GAZETY WYBORCZEJ” REDAGUJE **AGNIESZKA ZAWISTOWSKA**

Matura 2009 matematyka i WOS

Sprawdź, czy zdasz!

poziom rozszerzony

Maturzysto! Od dziś drukujemy próbne testy maturalne na poziomie rozszerzonym. Na początek matematyka i WOS, jutro języki – angielski i niemiecki, które na pewno ułatwią studiowanie za granicą

MATEMATYKA

Czas pracy: **180 minut**

Zadanie 1. (0-3)

Wyznacz wszystkie wartości x, dla których liczby $3,\ 5,\ |x|$ mogą być długościami boków trójkąta.

Zadanie 2. (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + mx + 8 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest równa $11m - 34$.

Zadanie 3. (0-5)

Kilku uczniów wybrało się na pizzę. Razem mieli zapłacić 72 zł, ale okazało się, że trzech z nich nie wzięło pieniędzy. W tej sytuacji każdy z pozostałych zapłacił o 4 zł więcej, niż powinien. Oblicz, ilu uczniów wybrało się na pizzę.

Zadanie 4. (0-4)

a) Wykaż, że jeżeli x i y są liczbami rzeczywistymi i $x \cdot y > 0$ to $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

b) Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Zadanie 5. (0-5)

Pole trójkąta rozwartokątnego jest równe 8 cm^2. Dwa boki tego trójkąta mają długości 4 cm i 5 cm. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta. Wynik podaj z zaokrągleniem do 0,01 mm.

Zadanie 6. (0-6)

Punkt $A = (-2,1)$ jest wierzchołkiem rombu o polu równym 20. Punkt $M = (2,3)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz równanie okręgu wpisanego w ten romb.

Zadanie 7. (0-5)

Liczby $x^3 - 2x^2 + 9,\ 4x,\ 2x + 3$ są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 8. (0-5)

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A - liczba rzutów, w których otrzymamy sześć oczek, będzie równa liczbie rzutów, w których uzyskamy jedno oczko. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 9. (0-5)

Dany jest zbiór wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 216. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość tego z danych graniastosłupów, który ma największe pole powierzchni bocznej.

Zadanie 10. (0-7)

Podstawa ostrosłupa jest kwadratem. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy ostrosłupa. Najdłuższa krawędź boczna ma długość $13\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego sinus jest równy $\frac{12}{13}$. Narysuj rysunek pomocniczy i oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Model odpowiedzi – s. 2 ►►►

MODEL ODPOWIEDZI

Każda kropka (•) to 1 punkt.

Zadanie 1.

• Zapisanie układu nierówności. (Z nierówności trójkąta: suma długości każdych dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.)

$$\begin{cases} 3+5>|x| \\ 3+|x|>5 \\ 5+|x|>3 \end{cases}$$

•• Rozwiązanie układu nierówności i zapisanie odpowiedzi.

$x \in (-8;-2) \cup (2;8)$

Zadanie 2.

• Wyznaczenie wszystkich wartości, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

$m \in \left(-\infty;-4\sqrt{2}\right) \cup \left(4\sqrt{2};+\infty\right)$

(Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy $\Delta > 0$, tu $\Delta = m^2 - 32$)

Wyznaczenie sumy S kwadratów pierwiastków w zależności od parametru m.

$S = m^2 - 16.$

$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2$, (korzystamy ze wzorów Victe'a.)

• Ułożenie i rozwiązanie równania $S = 11m - 34$.

$m^2 - 16 = 11m - 34$

$m_1 = 2,\ m_2 = 9$

• Wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania i sformułowanie odpowiedzi $m = 9$

Zadanie 3.

• Wprowadzenie oznaczeń, analiza warunków zadania i podanie założeń.

n - liczba uczniów, $n > 3$

x - kwota do zapłacenia przypadająca na jednego ucznia.

• Ułożenie układu równań.

$$\begin{cases} nx = 72 \\ (n-3)(x+4) = 72 \end{cases}$$

•• Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą n.

$n^2 - 3n - 54 = 0$

• Rozwiązanie układu równań, wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania i sformułowanie odpowiedzi.
$n = 9$
Na pizzę wybrało się 9 uczniów.

Zadanie 4.

a)
• Przekształcenie nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$ do postaci równoważnej $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

• Przekształcenie nierówności $x^2 + y^2 \ge 2xy$ do postaci $(x-y)^2 \ge 0$ i sformułowanie wniosku kończącego dowód.

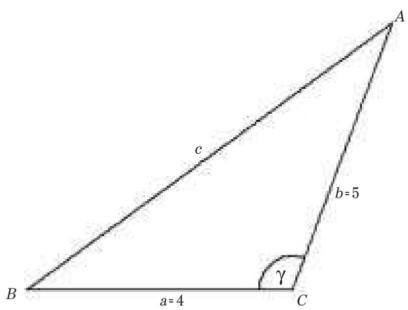
b)
• Przekształcenie lewej strony nierówności $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge 9$ do postaci $3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$

• Przeprowadzenie dowodu w oparciu o nierówności z podpunktu **a)**.

Zadanie 5.

• Wprowadzenie oznaczeń, na przykład na rysunku, i zapisanie wzoru na pole P trójkąta zgodnie z przyjętymi oznaczeniami.

$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$



• Obliczenie $\sin\gamma$.

$\sin\gamma = 0,8$

• Zapisanie z twierdzenia kosinusów wzoru na c - długość boku AB.

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$

• Obliczenie $\cos\gamma$.

$\cos\gamma = -0,6$

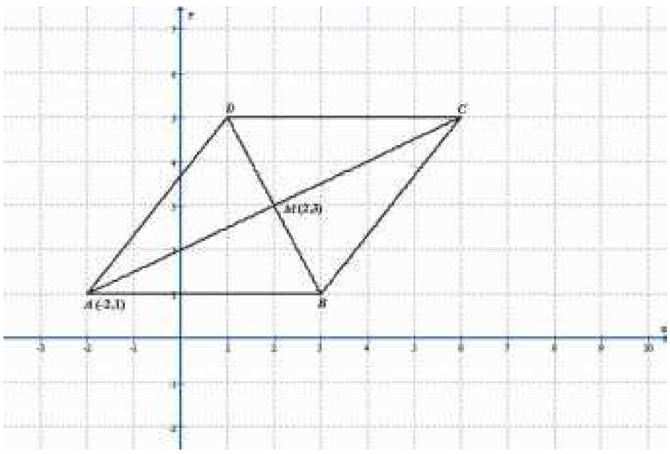
(Wartość $\cos\gamma$ otrzymujemy z „jedynki trygonometrycznej" i faktu, że γ jest miarą kąta rozwartego.)

• Obliczenie c i podanie wyniku z wymaganym zaokrągleniem.

$c = 80,62$ mm.

Zadanie 6.

• Narysowanie rysunku pomocniczego, wprowadzenie oznaczeń i analiza warunków zadania.



Punkt M jest środkiem symetrii rombu i jednocześnie środkiem okręgu wpisanego w ten romb.

• Obliczenie długości przekątnej AC.

$|AC| = 4\sqrt{5}$

$\left(|AC| = 2 \cdot |AM|\right)$

• Obliczenie długości przekątnej BD.

$|BD| = 2\sqrt{5}$ (ze wzoru na pole rombu)

• Obliczenie długości boku AB.

$|AB| = 5$

(z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego AMB)

• Obliczenie promienia r okręgu wpisanego w romb.
$r = 2$
(ze wzoru na pole rombu, r to połowa wysokości rombu)

• Napisanie równania okręgu wpisanego w romb.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

Zadanie 7.

• Ułożenie równania wynikającego z warunków zadania.

$4x = \frac{x^3 - 2x^2 + 9 + 2x + 3}{2}$

• Przekształcenie równania $4x = \frac{x^3 - 2x^2 + 9 + 2x + 3}{2}$ do postaci $x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = 0$.

•• Rozwiązanie równania $x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = 0$.

$x_1 = -\sqrt{6},\ x_2 = 2,\ x_3 = \sqrt{6}$

$\left(x^3 - 2x^3 - 6x + 12 = x^2(x-2) - 6(x-2) = (x-2)(x^2-6)\right)$

• Wybór rozwiązania spełniającego warunki zadania.

$x = 2$ lub $x = \sqrt{6}$

Zadanie 8.

• Opisanie zbioru zdarzeń elementarnych Ω, stwierdzenie, że mamy model klasyczny, i obliczenie mocy Ω.

Ω jest zbiorem wszystkich funkcji $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5,6\}$

$|\Omega| = 6^5 = 7776$

••• Opisanie zdarzenia A i obliczenie $|A|$.

$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, gdzie A_i - otrzymamy i razy sześć oczek oraz i razy jedno oczko

$A_i \cap A_j = \varnothing$ dla $i \neq j$

$|A| = |A_0| + |A_1| + |A_2|$

Obliczenie $|A_i|$ dla $i \in \{0,1,2\}$

$|A_0| = 4^5 = 1024,\quad |A_1| = 5\cdot4\cdot4^3 = 1280,\quad |A_2| = \binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot4 = 10\cdot3\cdot4 = 120$

• Obliczenie $P(A)$ i podanie wyniku w wymaganej postaci.

$P(A) = \frac{2424}{7776} = \frac{101}{324}$

Zadanie 9.

• Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie - zgodnie z przyjętymi oznaczeniami - warunków zadania i wzoru na pole powierzchni bocznej. Na przykład:
a - długość krawędzi podstawy graniastosłupa
h - wysokość graniastosłupa

$12a + 6h = 216,\quad P_b = 6ah$

• Uzależnienie, na przykład h od a.

$h = 36 - 2a$

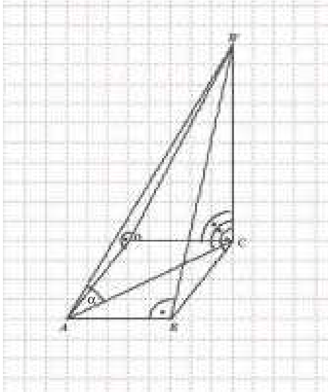
• Określenie pola powierzchni bocznej graniastosłupa jako funkcji argumentu a i podanie dziedziny tej funkcji.

$P_b(a) = -12a^2 + 216a$, gdzie $a \in (0;18)$

• Podanie, z uzasadnieniem, argumentu a dla którego funkcja P_b przyjmuje największą wartość + $a = 9$
Funkcja kwadratowa $P_b(a) = -12a^2 + 216a$ rozpatrywana w przedziale $(0;18)$ przyjmuje wartość największą dla $a = 9$ (pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji)

• Sformułowanie odpowiedzi.
$a = 9$, $h = 18$

Zadanie 10.



• Narysowanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń.

• Stwierdzenie, że trójkąty

BCW, DCW, ABW i ADW

są prostokątne, bo

$|\angle BCW| = |\angle DCW| = |\angle ABW| = |\angle ADW| = 90°$

• Zapisanie wzoru na pole powierzchni bocznej zgodnie z przyjętymi oznaczeniami.

$P_b = 2\cdot P_{\angle BCW} + 2\cdot P_{\angle ABW} = |BC|\cdot|CW| + |AB|\cdot|BW| = |BC|\cdot(|CW| + |BW|)$

••• Obliczenie $|CW|, |BC|, |BW|$.

$|AC| = |AW|\cdot\cos\alpha$

$|CW| = |AW|\cdot\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{12}{13},\quad \cos\alpha = \frac{5}{13}$

$|AC| = 5\sqrt{2},$

$|CW| = 12\sqrt{2}$

Obliczenie $|BC|$.

$|BC| = \frac{|AC|\cdot\sqrt{2}}{2} = 5$

Obliczenie $|BW|$.

$|BW| = \sqrt{|BC|^2 + |CW|^2} = \sqrt{313}$

• Obliczenie P_b

$P_b = 5(12\sqrt{2} + \sqrt{313})$

Autorka: Anna Zalewska

WIEDZA O SPOŁECZEŃSTWIE

Czas pracy: **180 minut**

Część I. (0-20)

W zadaniach 1. – 4. wybierz prawidłową odpowiedź.

Zadanie 1. (0-1)

Obecnie w Szwajcarii obowiązuje system:

A. parlamentarno-gabinetowy
B. prezydencki
C. kanclerski
D. parlamentarno-komitetowy

Zadanie 2. (0-1)

Zasada subsydiarności jest podstawą ideologii:

A. konserwatywnej
B. chrześcijańskiej demokracji
C. liberalnej
D. komunistycznej

Zadanie 3. (0-1)

Wybory do Senatu III RP są:

A. tajne, powszechne, bezpośrednie
B. równe, tajne, powszechne
C. proporcjonalne, tajne, bezpośrednie
D. powszechne, równe, proporcjonalne

Zadanie 4. (0-1)

Za jednego z ojców zjednoczonej Europy uważa się:

A. Roberta Schumana
B. Margaret Thatcher
C. Lecha Wałęsę
D. Vaclava Havla

Zadanie 5. (0-1)

Wyjaśnij, na czym polega nepotyzm (jako patologia władzy) we współczesnym państwie demokratycznym.

....

....

....

Zadanie 6. (0-2)

Podaj trzy argumentu zwolenników i trzy argumenty przeciwników prawa do aborcji.

Zwolennicy:

1. ....

2. ....

3. ....

Przeciwnicy:

1. ....

2. ....

3. ....

Zadanie 7. (0-1)

Na podstawie rysunku satyrycznego obok wykonaj polecenie.

Tłumaczenie:

„Konstytucja, art. 3 (2)
„Mężczyźni i kobiety są równi wobec prawa"

Podkreśl zdanie, które wyjaśnia przesłanie ilustracji obok.

A. Współczesne konstytucje państw demokratycznych nie gwarantują prawnego równouprawnienia kobiet i mężczyzn.

B. Współczesna walka o równouprawnienie angażuje tak samo kobiety jak i mężczyzn.

C. Kobietom nie zależy na równouprawnieniu, wolą zajmować się dziećmi i zakupami.

D. Współczesne społeczeństwa demokratyczne gwarantują prawnie równouprawnienie kobiet i mężczyzn, jednak większość obowiązków domowych i tak spoczywa na kobiecie.

Źródło: archiwum własne autorki

Ciąg dalszy – s. 4 ►►►