CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2017

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY	
KOD	PESEL

miejsce na naklejkę

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

UZUPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY
Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania kryteriów oceniania
☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią

DATA: **2 czerwca 2017 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS PRACY: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 24 strony (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◉ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki, a także z kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-P1_1P-173

MMA 2017

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $|9-2|-|4-7|$ jest równa

A. 4 **B.** 10 **C.** -10 **D.** -4

$$\underbrace{|9-2|}_{7}-\underbrace{|4-7|}_{3}$$

Zadanie 2. (0–1)

Iloczyn dodatnich liczb a i b jest równy 1350. Ponadto 15% liczby a jest równe 10% liczby b. Stąd wynika, że b jest równe

A. 9 **B.** 18 **C.** 45 **D.** 50

$$10\%b = 15\%a \Leftrightarrow 0{,}1b = 0{,}15a \Leftrightarrow a = \frac{10}{15}b = \frac{2}{3}b$$

$$ab = 1350 \Leftrightarrow \frac{2}{3}b \cdot b = 1350 \Leftrightarrow b^2 = 2025 \Leftrightarrow b = 45$$

Zadanie 3. (0–1)

Suma $16^{24}+16^{24}+16^{24}+16^{24}$ jest równa

A. 4^{24} **B.** 4^{25} **C.** 4^{48} **D.** 4^{49}

$a+a+a+a=4a$ i podobnie tutaj: $16^{24}+16^{24}+16^{24}+16^{24}=4\cdot 16^{24}=$

$$=4\cdot(4^2)^{24}=4^1\cdot 4^{48}=4^{49}$$

Zadanie 4. (0–1)

Liczba $\log_3 27-\log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

$$\underbrace{\log_3 27}_{3\ bo\ 3^3=27}-\underbrace{\log_3 1}_{0\ bo\ 3^0=1}=3-0=3$$

Zadanie 5. (0–1)

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie x^6-2x^3-3 jest równe

A. $(x^3+1)(x^2-3)$ **B.** $(x^3-3)(x^3+1)$ **C.** $(x^2+3)(x^4-1)$ **D.** $(x^4+1)(x^2-3)$

$$x^6-2x^3-2=x^6-2x^3+1-4=(x^3-1)^2-2^2=$$

$$=[(x^3-1)-2][(x^3-1)+2]=(x^3-3)(x^3+1)$$

Zadanie 6. (0–1)

Wartość wyrażenia $(b-a)^2$ dla $a=2\sqrt{3}$ i $b=\sqrt{75}$ jest równa

A. 9 **B.** 27 **C.** 63 **D.** 147

$$b=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3},\quad (b-a)^2=\left(5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2=9\cdot 3=27$$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 7. (0–1)

Funkcja liniowa *f* jest określona wzorem $f(x)=21-\frac{7}{3}x$. Miejscem zerowym funkcji *f* jest

A. -9 **B.** $-\frac{7}{3}$ **C.** 9 **D.** 21

$$0=21-\frac{7}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{3}x=21 \Leftrightarrow x=21\cdot\frac{3}{7}=9$$

Zadanie 8. (0–1)

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=b \end{cases}$ z niewiadomymi x i y jest para liczb dodatnich. Wynika stąd, że

A. $b<-1$ **B.** $b=-1$ **C.** $-1<b<1$ **D.** $b\geq 1$

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=b \end{cases}$ po dodaniu stronami mamy $2x=b+1$ czyli $x=\frac{b+1}{2}$

$$y=1-x=1-\frac{b+1}{2}=\frac{2-(b+1)}{2}=\frac{1-b}{2}$$

$x>0$ i $y>0$ czyli $b+1>0$ i $1-b>0$ czyli $-1<b<1$

Zadanie 9. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ oraz $f(-1)=f(3)=1$. Współczynnik b jest równy

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 3

$$f(-1)=(-1)^2+b\cdot(-1)+c=1-b+c\text{, co daje } c=b-1$$

$$f(3)=9+3b+c\text{, co daje } c=-3b-9$$

$$b-1=-3b-9 \Leftrightarrow 4b=-8 \Leftrightarrow b=-2$$

Zadanie 10. (0–1)

Równanie $x(x-3)(x^2+25)=0$ ma dokładnie

A. cztery rozwiązania: $x=0$, $x=3$, $x=5$, $x=-5$

B. trzy rozwiązania: $x=3$, $x=5$, $x=-5$

C. dwa rozwiązania: $x=0$, $x=3$

D. jedno rozwiązanie: $x=3$

$$x=0 \text{ lub } \underbrace{x-3=0}_{x=3} \text{ lub } \underbrace{x^2+25=0}_{brak\ rozwiązań}$$

Zadanie 11. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=(x-3)(7-x)$. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji *f* należy do prostej o równaniu

A. $y=-5$ **B.** $y=5$ **C.** $y=-4$ **D.** $y=4$

Miejsca zerowe: $x_1=3, x_2=7$

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli: $p=\frac{x_1+x_2}{2}=5$

Druga współrzędna wierzchołka paraboli: $q=f(5)=(5-3)(7-5)=4$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 12. (0–1)

Punkt $A=(2017,0)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem

A. $f(x)=(x+2017)^2$

B. $f(x)=x^2-2017$

C. $f(x)=(x+2017)(x-2017)$

D. $f(x)=x^2+2017$

$f(x)=0$ i $x=2017$ czyli $0=$ "*prawa strona*"

Widać, że $0=(2017+2017)(2017-2017)$

Zadanie 13. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n\geq 1$, spełniony jest warunek $2a_3=a_2+a_1+1$. Różnica r tego ciągu jest równa

A. 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

$$2a_3=a_2+a_1+1 \Leftrightarrow 2a_3-a_2-a_1=1 \Leftrightarrow \underbrace{(a_3-a_2)}_{r}+\underbrace{(a_3-a_1)}_{2r}=1$$

$$3r=1 \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$$

Zadanie 14. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny $(x, 2x^2, 4x^3, 8)$ o wyrazach nieujemnych. Wtedy

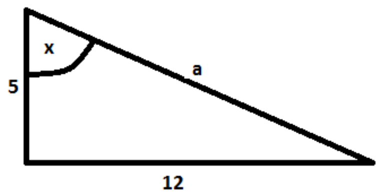
A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=2$ **D.** $x=4$

$$q=\frac{2x^2}{x}=\frac{8}{4x^3} \Leftrightarrow 2x=\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow 2x\cdot x^3=2 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=1$$ bo nieujemne

Zadanie 15. (0–1)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$. Wówczas $\sin\alpha$ jest równy

A. $\frac{5}{17}$ **B.** $\frac{12}{17}$ **C.** $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$



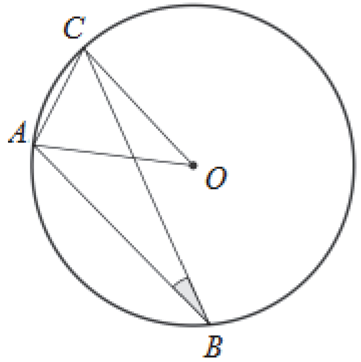
$$a^2=5^2+12^2 \Leftrightarrow a^2=169 \Leftrightarrow a=13$$

$$\sin x=\frac{12}{a}=\frac{12}{13}$$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 16. (0–1)

W okręgu o środku O dany jest kąt wpisany ABC o mierze $20°$ (patrz rysunek).



Miara kąta CAO jest równa

A. $85°$ **B.** $70°$ **C.** $80°$ **D.** $75°$

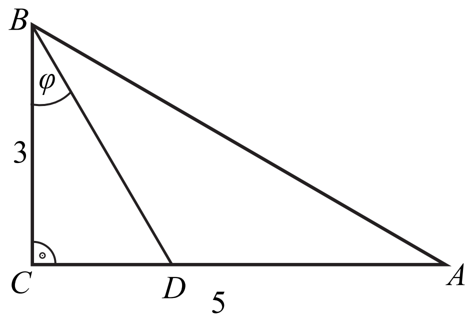
$$|\angle AOC| = 2 \cdot |\angle ABC| = 2 \cdot 20° = 40°$$

Trójkąt AOC jest równoramienny (dwa boki to promienie okręgu)

$$2 \cdot |\angle CAO| + 40° = 180° \text{ co daje } |\angle CAO| = 70°$$

Zadanie 17. (0–1)

Odcinek BD jest zawarty w dwusiecznej kąta ostrego ABC trójkąta prostokątnego, w którym przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 5 i 3.



Wówczas miara φ kąta DBC spełnia warunek

A. $20° < \varphi < 25°$ **B.** $25° < \varphi < 30°$ **C.** $30° < \varphi < 35°$ **D.** $35° < \varphi < 40°$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

W tablicach funkcji trygonometrycznych odczytujemy, że $2\varphi \cong 59°$

Stąd $\varphi \cong 29{,}5°$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 18. (0–1)

Prosta przechodząca przez punkt $A=(-10,5)$ i początek układu współrzędnych jest prostopadła do prostej o równaniu

A. $y=-2x+4$ **B.** $y=\frac{1}{2}x$ **C.** $y=-\frac{1}{2}x+1$ **D.** $y=2x-4$

Prosta przechodząca przez pocz. ukł. współrz. ma równanie $y = ax$

$$5 = a\cdot(-10) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych prostopadłych wynosi (-1).

Poprawna jest odp. D, bo $-\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

Zadanie 19. (0–1)

Punkty $A=(-21,11)$ i $B=(3,17)$ są końcami odcinka AB. Obrazem tego odcinka w symetrii względem osi Ox układu współrzędnych jest odcinek $A'B'$. Środkiem odcinka $A'B'$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-9,-14)$ **B.** $(-9,14)$ **C.** $(9,-14)$ **D.** $(9,14)$

Środek odcinka AB ma współrzędne: $S = \left(\frac{-21+3}{2}, \frac{11+17}{2}\right) = (-9,14)$

Punkt S' symetryczny do punktu S względem osi Ox ma współrzędne:

$S' = (-9,-14)$ - można to odczytać nawet z rysunku

Zadanie 20. (0–1)

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{5}{2}$, przy czym $|AB|=\frac{5}{2}|A'B'|$. Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta $A'B'C'$ jest równy

A. $\frac{4}{25}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{25}{4}$

Korzystamy z twierdzenia:

Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k, to iloraz pól: $\frac{P_{F_1}}{P_{F_2}} = k^2$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Zadanie 21. (0–1)

Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe $\frac{1}{3}\pi^3$. Długość boku tego trójkąta jest równa

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** π **C.** $\sqrt{3}\pi$ **D.** 3π

Promień koła opisanego na trójkącie równobocznym to $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta:

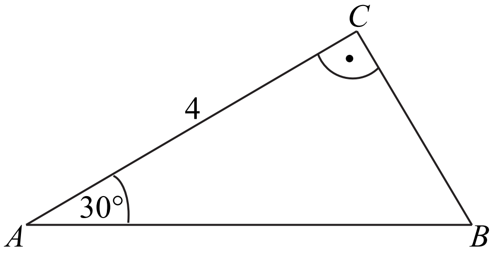
a – długość boku, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = \frac{2}{3}\cdot h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\pi R^2 = \pi\cdot\frac{a^2\cdot 3}{9} = \frac{\pi a^2}{3} \underbrace{=}_{dane} \frac{1}{3}\pi^3$ - z tego mamy: $a = \pi$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 22. (0–1)

Pole trójkąta prostokątnego ABC, przedstawionego na rysunku, jest równe



A. $\frac{32\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

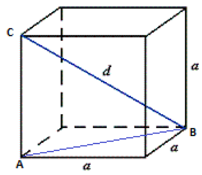
$$a = |BC|, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Zadanie 23. (0–1)

Długość przekątnej sześcianu jest równa 6. Stąd wynika, że pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

A. 72



B. 48 **C.** 152 **D.** 108

$$|AB| = a\sqrt{2}, |BC| = 6, |AC| = a$$

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 6^2 \Leftrightarrow 2a^2 + a^2 = 36 \Leftrightarrow a^2 = 12$$

$$P_c = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 12 = 72$$

Zadanie 24. (0–1)

Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π, a promień jego podstawy ma długość 2. Wysokość tego walca jest równa

A. 4 **B.** 8 **C.** 4π **D.** 8π

$P_b = 2\pi rh$ oraz $r = 2$, czyli $16\pi = 2\pi \cdot 2h$ co daje $h = 4$

Zadanie 25. (0–1)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania pary liczb, których iloczyn jest większy od 20, jest równe

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{5}{36}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{2}{9}$

Wszystkich wyników jest $6 \cdot 6 = 36$

Iloczyn będzie większy od 20, jeżeli wypadnie jeden z sześciu wyników:

$(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)$

Szukane prawdopodobieństwo: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $\left(x-\frac{1}{2}\right)x > 3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

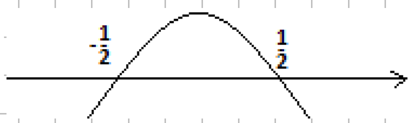
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)x-\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(3x+1)>0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)[x-(3x+1)]>0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(-2x-1)>0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$$

$$x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$$



$$x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Odpowiedź: ...... Rozwiązanie nierówności: $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ....

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{4}$$

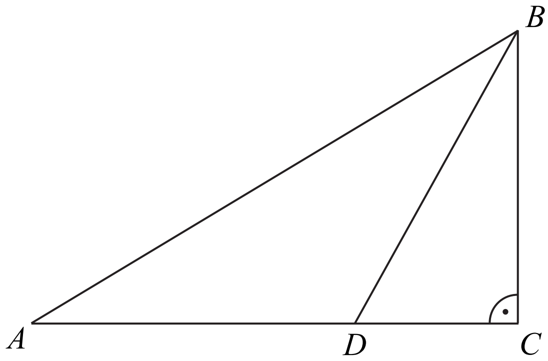
$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

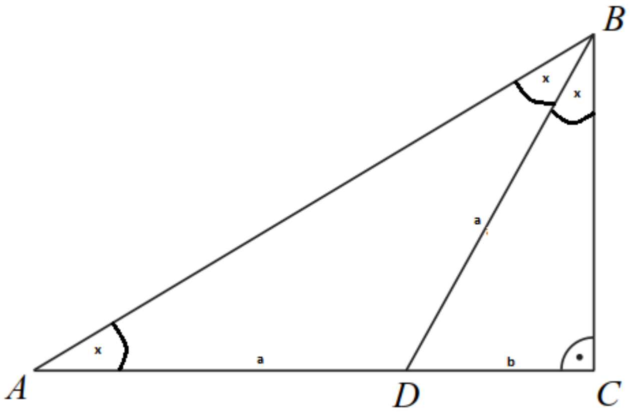
Odpowiedź: $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}$

Zadanie 28. (0–2)

Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D.



Udowodnij, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.



$3x + 90° = 180° \quad \Leftrightarrow \quad x = 30°$

W prostokątnym trójkącie BCD kąty ostre mają miary 30° i 60°.

Z własności takiego trójkąta wynika, że $a = 2b$, czyli $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$,

a to właśnie należało udowodnić.

Zadanie 29. (0–2)
Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1,5)^{100} < 6^{25}.$$

$$(1,5)^{100} < 6^{25} \Leftrightarrow [(1,5)^4]^{25} < 6^{25} \Leftrightarrow (5,0625)^{25} < 6^{25}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, co kończy dowód

Zadanie 30. (0–2)

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = 15 \cdot \left(a_1 + \underbrace{30}_{dane}\right) = \underbrace{30}_{dane}$$

$$a_1 + 30 = 2 \iff a_1 = -28$$

$$a_1 + 29r = a_{30} \iff -28 + 29r = 30 \iff 29r = 58 \iff r = 2$$

Odpowiedź: $r = 2$

Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

Ilość wszystkich możliwych losowań: $15 \cdot 14$

W podanym zbiorze jest 8 liczb nieparzystych i 7 liczb parzystych.

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą parzystą, jeżeli co najmniej jedna z nich jest parzysta.

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą nieparzystą, jeżeli obie są nieparzyste.

Oznaczmy zdarzenia:

A - iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą parzystą

A' - iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą

Ilość wyników losowania, w których iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą wynosi $8 \cdot 7$

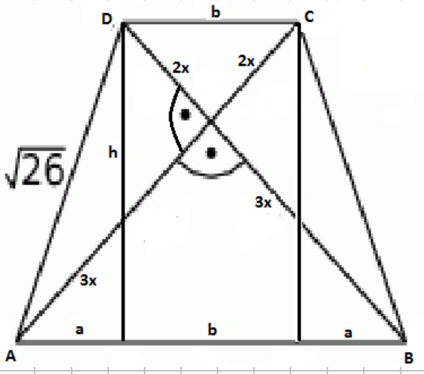
$P(A') = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 14} = \frac{4}{15}$

$P(A) = 1 - P(A') = \frac{11}{15}$

Odpowiedź: $\frac{11}{15}$ ....

Zadanie 32. (0–4)

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.



$$(2x)^2+(3x)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2 \iff 13x^2=26 \iff x^2=2 \iff x=\sqrt{2}$$

$$(2x)^2+(2x)^2=b^2 \iff b^2=8x^2=8\cdot 2=16 \iff b=4$$

$$(3x)^2+(3x)^2=(2a+b)^2 \iff (2a+4)^2=18x^2 \iff (2a+4)^2=36$$

$$2a+4=6 \iff a=1$$

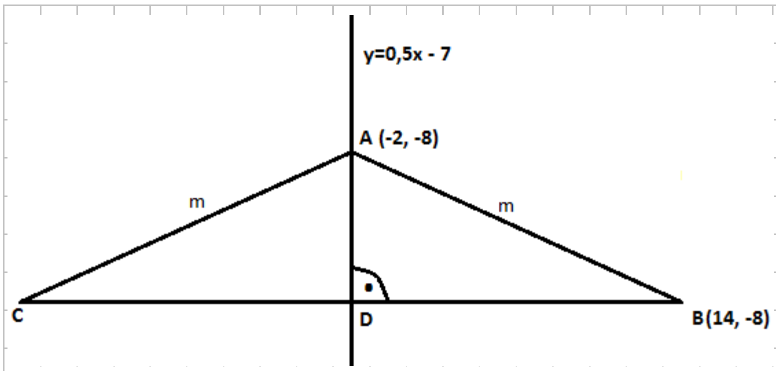
$$h^2+a^2=\left(\sqrt{26}\right)^2 \iff h^2=26-1=25 \iff h=5$$

$$P=\frac{(2a+b)+b}{2}\cdot h=\frac{2(a+b)}{2}\cdot h=(1+4)\cdot 5=25$$

Odpowiedź: 25 ....

Zadanie 33. (0–4)

Punkty $A=(-2,-8)$ i $B=(14,-8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AB|=|AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x-7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.



Prosta BC prostopadła do danej prostej ma równanie:

$$y = ax + b, \text{ gdzie } \underbrace{a \cdot 0{,}5 = -1}_{warunek\ na\ prostopadłość} \iff a = -2, \text{ czyli } y = -2x + b$$

Do tej prostej należy punkt B, co daje: $-8 = -2 \cdot 14 + b \iff b = 20,\ \ y = -2x + 20$

Punkt D wyznaczymy rozwiązując układ równań: $\begin{cases} y = 0{,}5x - 7 \\ y = -2x + 20 \end{cases}$

$$0{,}5x - 7 = -2x + 20 \iff \frac{5}{2}x = 27 \iff x = 27 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 7 = \frac{1}{2} \cdot \frac{54}{5} - 7 = \frac{27}{5} - \frac{35}{5} = -\frac{8}{5}$$

Otrzymaliśmy: $D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

Oznaczmy: $C = (p, q)$

Punkt D jest środkiem odcinka BC, dlatego mamy:

$$\frac{54}{5} = \frac{p+14}{2} \quad i \quad -\frac{8}{5} = \frac{q+(-8)}{2}$$

$$\frac{108}{5} = p + 14 \quad i \quad -\frac{16}{5} = q - 8$$

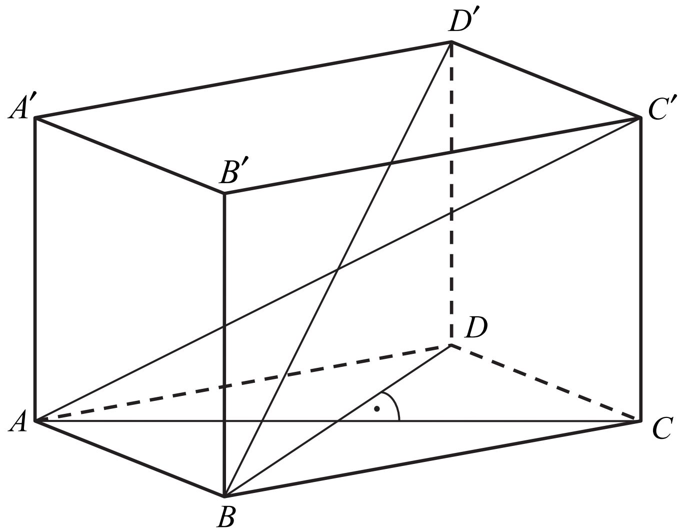
$$\frac{108}{5} - \frac{70}{5} = p \quad i \quad -\frac{16}{5} + \frac{40}{5} = q$$

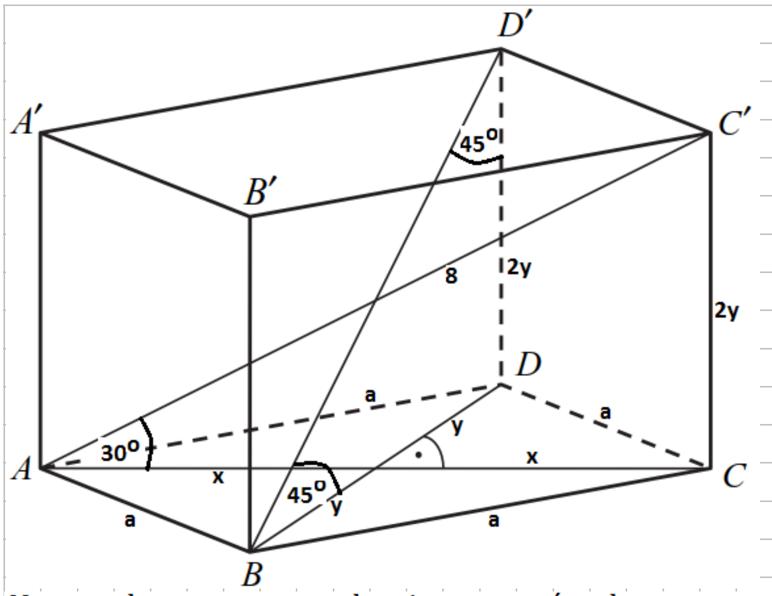
$$p = \frac{38}{5} \quad i \quad q = \frac{24}{5}$$

Odpowiedź: $C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right)$

Zadanie 34. (0–5)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.





Na rysunku przy wprowadzaniu oznaczeń wykorzystano:
- przekątne rombu przecinają się na połowy
- trójkąt BDD' jest równoramienny

W trójkącie ACC':

$$\sin 30° = \frac{2y}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 2$$

$$\cos 30° = \frac{2x}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 = x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16 \Leftrightarrow a = 4$$

$$P_c = 2 \cdot \underbrace{P_p}_{pole\ rombu} + 4 \cdot a \cdot 2y = 2 \cdot \frac{(2x)\cdot(2y)}{2} + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4\sqrt{3} \cdot 4 + 64 = 16\sqrt{3} + 64$$

Odpowiedź: $16\sqrt{3} + 64$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*