# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
# Z NOWĄ ERĄ 2017/2018

# MATEMATYKA
## POZIOM ROZSZERZONY

### ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

**Zadanie 1. (0–1)**

| Wymagania ogólne | Wymagania szczegółowe | Poprawna odpowiedź |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R4.1. Funkcje.<br>Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$. | **C** |

**Zadanie 2. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R11.4. Rachunek różniczkowy.<br>Zdający korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji. | **A** |

**Zadanie 3. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R5.2. Ciągi.<br>Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów. | **D** |

**Zadanie 4. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R5.3. Ciągi.<br>Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy. | **B** |

**Zadanie 5. (0–1)**

| | | |
|---|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | R8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej.<br>Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności. | **D** |

**Zadanie 6. (0–2)**

| | | |
|---|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający:<br>P4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;<br>R5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów. | 554 |

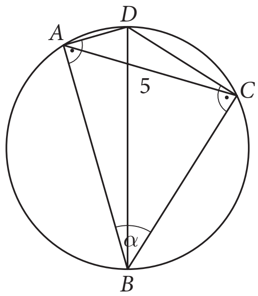
**Uwaga.** Ocenie podlega tylko odpowiedź zakodowana.

**Zadanie 7. (0–3)**
W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AC| = 5$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$, $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
Oblicz długość przekątnej $BD$ tego czworokąta.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | R7. Planimetria. Zdający:<br>1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;<br>5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. |

**Przykładowe rozwiązania**

**Sposób I**
Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



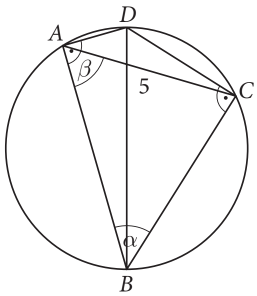

Ponieważ $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ$, więc na tym czworokącie można opisać okrąg, a przekątna $BD$ czworokąta jest jednocześnie średnicą tego okręgu (kąt wpisany prosty jest oparty na średnicy).
Z twierdzenia sinusów w trójkącie $ABC$ otrzymujemy:

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = |BD|,$$

$$\frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = |BD|.$$

Stąd $|BD| = 3\sqrt{5}$.

**Sposób II**
Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.




$|\sphericalangle DAC| = 90^\circ - \beta$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

Stosujemy twierdzenie sinusów w trójkątach *ABC* i *ACD*.

$$\frac{|BC|}{\sin\beta}=\frac{5}{\sin\alpha} \qquad \frac{|CD|}{\sin(90^\circ-\beta)}=\frac{5}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

$$|BC|=3\sqrt{5}\sin\beta \qquad |CD|=3\sqrt{5}\cos\beta$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *BCD* otrzymujemy:

$|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2$,

$|BD|^2=(3\sqrt{5}\sin\beta)^2+(3\sqrt{5}\cos\beta)^2$,

$|BD|^2=45(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$,

$|BD|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

gdy sporządzi poprawny rysunek.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **2 pkt**

gdy sporządzi rysunek i:

- zauważy, że na czworokącie można opisać okrąg, a przekątna *BD* jest średnicą tego okręgu

albo

- uzależni długości odcinków *BC* i *CD* od funkcji trygonometrycznych kąta $\beta$:
  $|BC|=3\sqrt{5}\sin\beta, |CD|=3\sqrt{5}\cos\beta$,

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **3 pkt**

gdy obliczy długość przekątnej: $|BD|=3\sqrt{5}$.

**Zadanie 8. (0–3)**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x$ prawdziwa jest nierówność:

$x^4-4x^3-2x^2+12x+9\geqslant 0$.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | P2.1. Wyrażenia algebraiczne.<br>Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^2$ oraz $a^2-b^2$.<br>R3.7. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe. |

**Przykładowe rozwiązania**

**<u>Sposób I</u>**

Lewa strona nierówności jest wielomianem $W(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+9$ o współczynnikach całkowitych. Szukamy pierwiastków tego wielomianu wśród dzielników liczby 9.

$W(-1)=1+4-2-12+9=0$

Wykonujemy dzielenie wielomianu $W$ przez dwumian $x+1$ i otrzymujemy $P(x)=x^3-5x^2+3x+9$.

Teraz szukamy pierwiastków wielomianu $P(x)$ wśród dzielników liczby 9.

$P(-1)=-1-5-3+9=0$

Wykonujemy dzielenie wielomianu $P$ przez dwumian $x+1$ i otrzymujemy $Q(x)=x^2-6x+9$.

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i zapisujemy $Q(x) = (x-3)^2$.
A zatem $W(x) = (x+1)^2(x-3)^2$.
Dla każdej liczby $x \in R$ prawdziwe są nierówności $(x+1)^2 \geqslant 0$ i $(x-3)^2 \geqslant 0$, a więc prawdziwa jest też nierówność $(x+1)^2(x-3)^2 \geqslant 0$, co należało udowodnić.

**Sposób II**

Przekształcamy lewą stronę nierówności, stosując wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów.

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 =$$
$$= x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^3 + 16x - 4x + 8 =$$
$$= (x^2-1)^2 - 4x(x-2)(x+2) - 4(x-2) =$$
$$= (x-1)^2(x+1)^2 - 4(x-2)(x^2+2x+1) =$$
$$= (x+1)^2(x^2 - 2x + 1 - 4x + 8) =$$
$$= (x+1)^2(x^2 - 6x + 9) =$$
$$= (x+1)^2(x-3)^2$$

Dla każdej liczby $x \in R$ prawdziwa jest nierówność $(x+1)^2(x-3)^2 \geqslant 0$, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, czego należało dowieść.

**Sposób III**

Rozważmy funkcję $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$.

Wielomian jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych,

a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) = \infty$,

więc wystarczy wykazać, że najmniejsza wartość wielomianu $f$ jest dodatnia.

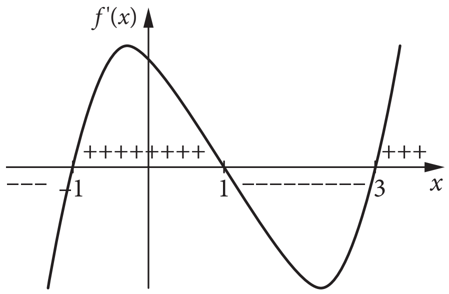
Wyznaczamy funkcję pochodną:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$,

i obliczamy jej miejsca zerowe.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0$$
$$4x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$
$$4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$$
$$x = 1 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 3$$

Szkicujemy wykres znaku pochodnej.




Funkcja $f$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$ oraz $\langle 1, 3\rangle$ i rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1, 1\rangle$ oraz $\langle 3, \infty)$, więc wartość najmniejszą przyjmuje w jednym z minimów lokalnych, czyli dla $x = -1$ lub $x = 3$.

$f(-1) = 1 + 4 - 2 - 12 + 9 = 0$

$f(3) = 81 - 4 \cdot 27 - 18 + 36 + 9 = 0$

Wartość najmniejsza funkcji $f$ jest równa 0, zatem $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in R$, co kończy dowód.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................ **1 pkt**

- gdy znajdzie przynajmniej 2 pierwiastki wielomianu stopnia czwartego i zapisze ten wielomian w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego

albo

- gdy grupę składników: $x^4 - 2x^2 + 1$ zapisze w postaci: $(x-1)^2(x+1)^2$ lub grupę składników: $-4x^3 + 12x + 8$ rozłoży na czynniki, np. do postaci: $-4(x-2)(x^2+2x+1)$

albo

- gdy wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$ i obliczy jej miejsca zerowe: $x \in \{-1, 1, 3\}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **2 pkt**

- gdy zapisze nierówność w postaci $(x+1)^2(x-3)^2 \geqslant 0$

albo

- gdy zbada znak pochodnej i ustali argumenty, dla których wielomian może osiągnąć wartość najmniejszą

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ........................................ **3 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 9. (0–3)**

Ciąg $(a_n)$ jest określony wzorem:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \frac{1}{\log_4(n+1)} + \ldots + \log_{2018}(n+1)}$$

dla $n \geqslant 1$. Uzasadnij, że wzór ciągu $(a_n)$ można zapisać w postaci: $a_n = \log_{2018!}(n+1)$ i oblicz wartość wyrażenia: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2017}$.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający:<br>P6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.<br>R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.<br>P5.1.Ciągi.<br>Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu wynika, że $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$. Zatem wzór ciągu:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\log_{2018}(n+1)}}$$

można zapisać w postaci:

$$a_n = \frac{1}{\log_{n+1}2 + \log_{n+1}3 + \ldots + \log_{n+1}2018}.$$

Po zastosowaniu wzoru na sumę logarytmów otrzymujemy:

$a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2018)}$,

$a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1} 2018!}$,

$a_n = \log_{2018!}(n+1)$.

Teraz można obliczyć wartość sumy.

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2017} = \log_{2018!} 2 + \log_{2018!} 3 + \log_{2018!} 4 + ... + \log_{2018!} 2018 =$
$= \log_{2018!}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2018) = \log_{2018!} 2018! = 1$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **1 pkt**

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci: $a_n = \dfrac{1}{\log_{n+1} 2 + \log_{n+1} 3 + ... + \log_{n+1} 2018}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **2 pkt**

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci: $a_n = \log_{2018!}(n+1)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ........ **3 pkt**

Zdający obliczy wartość wyrażenia $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2017} = 1$.

**Zadanie 10. (0–5)**

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x$ spełniające równanie: $2\sin^2 x - \cos 2x = 1$. Oblicz sumę wszystkich rozwiązań tego równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | R6.6. Trygonometria.<br>Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne.<br>P5.3. Ciągi.<br>Zdający stosuje wzór na $n$-ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Przykładowe rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów: pierwszy to ustalenie rozwiązań równania trygonometrycznego, a drugi – wyznaczenie sumy wszystkich rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$.

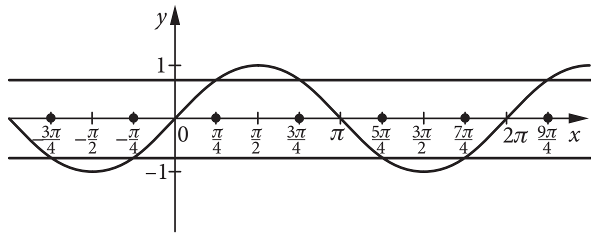
**Realizacja pierwszego etapu**

**Sposób I**

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie.

$$2\sin^2 x - \cos 2x = 1$$
$$2\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) = 1$$
$$4\sin^2 x = 2$$
$$\sin^2 x = \frac{2}{4}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Szkicujemy wykres funkcji sinus, by wyznaczyć wszystkie rozwiązania ostatniej alternatywy.




Zatem wszystkie rozwiązania równania możemy zapisać w postaci: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą.

**<u>Sposób II</u>**

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie.

$$2\sin^2 x - \cos 2x = 1$$

$$-\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$-\cos 2x = \cos 2x$$

$$2\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Stąd $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą.

**Realizacja drugiego etapu**

Spośród rozwiązań równania należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$ wybieramy najmniejsze – jest to $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (dla $k = 0$). Ponieważ każde dwa sąsiednie rozwiązania równania różnią się o $\frac{\pi}{2}$, więc dla kolejnych liczb naturalnych $k$ tworzą one rosnący ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz $a_1 = \frac{\pi}{4}$, a różnica $r = \frac{\pi}{2}$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać:

$$a_n = \frac{\pi}{4} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}.$$

Wyznaczamy liczbę wyrazów tego ciągu znajdujących się w przedziale $\langle 0, 32\pi \rangle$

$$a_n \leqslant 32\pi$$

$$\frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \leqslant 32\pi$$

Po przekształceniu nierówności otrzymujemy warunek:

$$n \leqslant 64,5,$$

więc $n \in \{1, 2, 3, ..., 64\}$.

Zatem 64 początkowe wyrazy ciągu $(a_n)$ należą do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$. Obliczamy ich sumę.

$$S_{64} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} + 63 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \cdot 64 = 1024\pi$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 pkt**

Zdający przekształci równanie do postaci:

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

albo

- $\cos 2x = 0$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **3 pkt**

Zdający poda rozwiązania równania, np. w postaci: $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **4 pkt**

Zdający obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$: $n = 64$.

**Rozwiązanie pełne** ........ **5 pkt**

Zdający obliczy sumę wszystkich rozwiązań równania trygonometrycznego należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$: $S_{64} = 1024\pi$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający w wyniku przekształceń zapisze tylko jedno z równań $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ albo $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, poda poprawne rozwiązania tego równania i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt.**
2. Jeżeli zdający poda poprawnie rozwiązania tylko jednego z równań: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ albo zapisze równość $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i stąd błędnie wyznaczy rozwiązania równania, to otrzymuje **2 punkty.**
3. Jeżeli zdający rozwiąże tylko jedno z równań $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ albo z każdego z wymienionych równań poda tylko jedną serię wyników i konsekwentnie – stosując własności ciągu arytmetycznego – obliczy sumę wszystkich rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 32\pi \rangle$, to otrzymuje **3 punkty.**

**Zadanie 11. (0–5)**

Urna zawiera 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losowano z niej osiem razy ze zwracaniem po jednej kuli i zapisywano wylosowane numery kolejno, od strony lewej do prawej. Zapisane cyfry utworzyły liczbę ośmiocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w doświadczeniu otrzymamy liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka.<br>Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych . |

**Przykładowe rozwiązania**

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, jest to zatem model klasyczny. Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczymy liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, czyli $|\Omega|$. W drugim etapie obliczymy, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, czyli $|A|$. W trzecim etapie wyznaczymy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$.

**Realizacja pierwszego etapu**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ośmiowyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, czyli wariacje z powtórzeniami. Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego jest zatem równa:

$$|\Omega| = 5^8.$$

**Realizacja drugiego etapu**

Niech $A$ oznacza zdarzenie, że utworzymy ośmiocyfrową liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

**<u>Sposób I</u>**

Najpierw obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, przy czym cyfry wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Należy uwzględnić następujące warunki:

- liczba ma być parzysta, zatem cyfrę jedności wybieramy spośród $\{2, 4\}$,
- mają być dokładnie trzy cyfry 3, zatem miejsca dla nich wybieramy na $\binom{7}{3}$ sposobów (bo ostatnie miejsce jest już zajęte),
- pozostają cztery wolne miejsca, na które możemy wstawić po jednej cyfrze ze zbioru $\{1, 2, 4, 5\}$.

Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$\underbrace{2}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 3}} \cdot \underbrace{4^4}_{\text{wybór pozostałych cyfr}} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 256 = 17\,920$$

Następnie obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5.

$$\underbrace{2}_{\text{wybór cyfry jedności}} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{wybór miejsc dla trzech 3}} \cdot \underbrace{3^4}_{\text{wybór pozostałych cyfr (bez 5 i 3)}} = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 81 = 5670$$

Wszystkich ośmiocyfrowych liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, jest:
$|A| = 17\,920 - 5670 = 12\,250$.

**<u>Sposób II</u>**

Zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu $A$ można podzielić na zdarzenia wykluczające się, uwzględniając liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczby ośmiocyfrowej:

1. z dokładnie jedną cyfrą 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4 \cdot 3^3 = 7560$
2. z dokładnie dwiema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3^2 = 3780$
3. z dokładnie trzema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot 3 = 840$
4. z dokładnie czterema cyframi 5: $2 \cdot \binom{7}{3} = 70$

Razem: $7560 + 3780 + 840 + 70 = 12\,250$.

Zatem $|A| = 12\,250$.

**Realizacja trzeciego etapu**

Jest to model klasyczny, więc:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{5^5} = \frac{98}{3125}.$$

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy** to ustalenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego: $|\Omega| = 5^8$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Etap drugi** to obliczenie, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdą się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**2 punkty** zdający otrzymuje wtedy, gdy:

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: 17 920

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5: 5670

albo

- poprawnie rozważy **przynajmniej jeden** przypadek uwzględniający liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: z 1 piątką – 7560, z 2 piątkami – 3780, z 3 piątkami – 840, z 4 piątkami – 70.

**3 punkty** zdający otrzymuje wtedy, gdy obliczy liczbę wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu $A$: $|A| = 12\,250$.

**Etap trzeci** to obliczenie prawdopodobieństwa i zapisanie wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A) = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{3125}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**
Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany również wtedy, gdy zdający popełni błąd rachunkowy w pierwszym lub drugim etapie i konsekwentnie obliczy $P(A)$, pod warunkiem, że otrzyma wartość z przedziału $(0, 1)$.

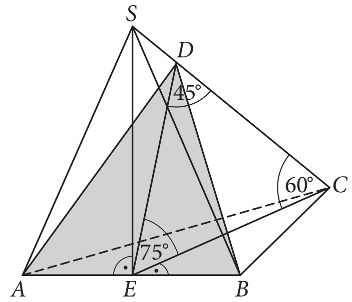
Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **5 punktów**.

**Zadanie 12. (0–5)**
W ostrosłupie $ABCS$ podstawa $ABC$ jest trójkątem równoramiennym o ramionach $AC$ i $BC$ długości 4 i kącie między nimi $30°$. Punkt $E$ – środek krawędzi $AB$ – jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa, a krawędź boczna $CS$ tworzy z podstawą kąt $60°$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź $AB$ i mającą z przeciwległą krawędzią boczną $CS$ wspólny punkt $D$ (jak na rysunku). Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że tworzy on z podstawą ostrosłupa kąt $75°$. Podaj dokładny wynik obliczeń.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający:<br>P2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;<br>P4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;<br>R2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną;<br>R7.5. Planimetria.<br>Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku. Zauważmy, że w trójkącie $EDC$ miara kata $EDC$ jest równa 45°.




Obliczamy długość krawędzi $AB$, stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie $ABC$.

$$|AB|^2 = 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \cos 30^\circ$$

$$|AB|^2 = 16(2-\sqrt{3})$$

$$|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $EBC$ i wyznaczamy wysokość $EC$.

$$|EC|^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$

$$|EC|^2 = 16 - 8 + 4\sqrt{3}$$

$$|EC|^2 = 4(2+\sqrt{3})$$

$$|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Odcinek $ED$ jest wysokością przekroju $ABD$. Jego długość obliczymy, stosując twierdzenie sinusów w trójkącie $ECD$.

$$\frac{|ED|}{\sin 60^\circ} = \frac{|EC|}{\sin 45^\circ}$$

$$|ED| = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$|ED| = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$$

Pole przekroju $ABD$ jest zatem równe:

$$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6},$$

$$P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{4-3},$$

$$P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6}.$$

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........ 1 pkt**

Zdający obliczy miarę kąta $EDC$ równą 45°.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........ 2 pkt**

Zdający obliczy długość krawędzi $|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ albo wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........................................ **3 pkt**

Zdający

- obliczy długość krawędzi $|AB| = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ i wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

albo

- obliczy wysokość podstawy ostrosłupa: $|EC| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ i wysokość przekroju *ABD:* $|ED| = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ........................................ **4 pkt**

Zdający obliczy długości odcinków: *AB* (krawędź podstawy ostrosłupa), *EC* (wysokość podstawy ostrosłupa) i *ED* (wysokość trójkąta *ABD*, będącego przekrojem ostrosłupa)

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ........................................ **5 pkt**

Zdający obliczy pole przekroju ostrosłupa: $P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6}$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup prawidłowy trójkątny albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów.**

2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy lub kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy, ale przy korzystaniu z własności figur, w których te kąty nie występują, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt.**

3. Jeżeli zdający odczyta przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty.**

**Zadanie 13. (0–6)**

Funkcja kwadratowa $f(x) = (2m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe $x_1$, $x_2$. Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których odległość między miejscami zerowymi wynosi nie więcej niż 4.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | R1.1. Liczby rzeczywiste.<br>Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną.<br>R3. Równania i nierówności. Zdający:<br>2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;<br>8) rozwiązuje proste nierówności wymierne. |

**Przykładowe rozwiązania**

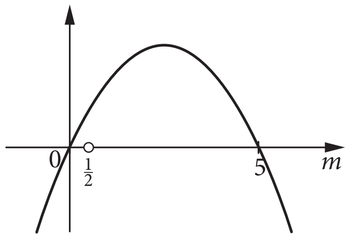
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczymy wszystkie wartości parametru $m$, dla których funkcja kwadratowa $f$ ma dwa miejsca zerowe. W drugim etapie wyznaczymy te wartości parametru $m$, dla których odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa co najwyżej 4. W trzecim etapie wyznaczymy wszystkie wartości parametru $m$ spełniające warunki zadania.

**Realizacja pierwszego etapu**

Funkcja *f* jest trójmianem kwadratowym, gdy $2m-1\neq 0$, czyli $m\neq \frac{1}{2}$.

Funkcja *f* ma dwa miejsca zerowe, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni.

$$4(m+1)^2-4(2m-1)(m-1)>0 \quad /:4$$
$$m^2+2m+1-2m^2+2m+m-1>0$$
$$-m^2+5m>0$$
$$-m(m-5)>0$$




Zatem dla $m\in(0,5)\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ funkcja *f* jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne miejsca zerowe.

**Realizacja drugiego etapu**

Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej wynika, że odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa wartości bezwzględnej ich różnicy. Należy zatem rozważyć warunek $|x_1-x_2|\leqslant 4$.

**<u>Sposób I</u>**

Korzystamy ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|\leqslant 4$$
$$\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right|\leqslant 4$$

Obie strony nierówności są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną:

$\frac{\Delta}{a^2}\leqslant 16$,

$\frac{4(-m^2+5m)}{(2m-1)^2}\leqslant 16$, gdzie $m\neq\frac{1}{2}$.

Wyrażenie $\frac{(2m-1)^2}{4}$ jest dodatnie, więc mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez $\frac{(2m-1)^2}{4}$, otrzymujemy nierówność równoważną.

$$-m^2+5m\leqslant 4(2m-1)^2$$
$$4(4m^2-4m+1)+m^2-5m\geqslant 0$$
$$17m^2-21m+4\geqslant 0$$
$$m\in\left(-\infty,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\left\langle 1,\infty\right)$$

**<u>Sposób II</u>**

Obie strony nierówności $|x_1-x_2|\leqslant 4$ są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujmy nierówność równoważną.

$$(x_1-x_2)^2\leqslant 16$$
$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leqslant 16$$

Stosujemy wzory Viète'a.

$$\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2-4\cdot\frac{m-1}{2m-1}\leqslant 16,\quad \text{gdzie } m\neq\frac{1}{2}$$

$$\frac{4(m^2+2m+1)}{(2m-1)^2}-\frac{4(m-1)(2m-1)}{(2m-1)^2}-\frac{16(2m-1)^2}{(2m-1)^2}\leqslant 0\quad /\cdot\frac{(2m-1)^2}{4}$$

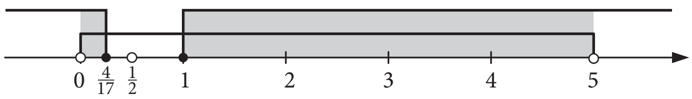
Po uproszczeniu otrzymujemy nierówność.

$$17m^2-21m+4\geqslant 0$$

$$m\in\left(-\infty,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\left\langle 1,\infty\right)$$

**Realizacja trzeciego etapu**

Wyznaczamy iloczyn zbiorów otrzymanych w etapach pierwszym i drugim.




Zatem odległość między miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f$ jest równa co najwyżej 4, gdy $m\in\left(0,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\left\langle 1,5\right)$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy** to ustalenie, dla jakich wartości parametru $m$ funkcja $f$ jest trójmianem kwadratowym i ma dwa miejsca zerowe: $a\neq 0$ i $\Delta>0$ dla $m\in(0,5)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie rozważy warunku $a\neq 0$ lub zapisze $\Delta\geqslant 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

**Etap drugi** to rozwiązanie nierówności $|x_1-x_2|\leqslant 4$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci $\frac{\Delta}{a^2}\leqslant 16$ lub $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\leqslant 16$.

**2 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności z jedną niewiadomą $m$, np. w postaci $\frac{4(-m^2+5m)}{(2m-1)^2}\leqslant 16$ lub $\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2-4\cdot\frac{m-1}{2m-1}\leqslant 16$.

**3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności: $m\in\left(-\infty,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\left\langle 1,\infty\right)$.

**Etap trzeci** to wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków z etapów pierwszego i drugiego: $m\in\left(0,\frac{4}{17}\right\rangle\cup\left\langle 1,5\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wtedy, gdy zdający poprawnie wykona przynajmniej jeden z etapów (pierwszy lub drugi), a ponadto w obu etapach otrzyma zbiory niepuste i różne od zbioru liczb rzeczywistych oraz konsekwentnie wyznaczy iloczyn tych zbiorów.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **6 punktów.**

**Zadanie 14. (0–6)**
Wyznacz równania wszystkich wspólnych stycznych do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$ i do okręgu o równaniu $x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | P7.2. Planimetria.<br>Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu.<br>R8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający:<br>4) oblicza odległość punktu od prostej;<br>5) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.<br>R11.3. Rachunek różniczkowy.<br>Zdający korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej. |

**Przykładowe rozwiązania**

Punkt $P=\left(p,\frac{1}{2}p^2\right)$ jest dowolnym punktem należącym do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$. Zaczynamy od wyznaczenia równania stycznej do tej paraboli w punkcie $P$ w zależności od wartości parametru $p\in R$. W tym celu obliczamy pochodną funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x^2$:

$f'(x)=x$.

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd $a=f'(p)=p$. Styczna do paraboli w punkcie $P$ wyraża się zatem równaniem postaci:

$y-\frac{1}{2}p^2=p(x-p)$,

$y=px-\frac{1}{2}p^2$.

Następnie tak dobieramy wartość parametru $p$, aby prosta o równaniu $y=px-\frac{1}{2}p^2$ była styczna do okręgu o środku $S=\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ i promieniu $r=\sqrt{2}$.

**<u>Sposób I</u>**

Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Przekształcamy równanie prostej: $y=px-\frac{1}{2}p^2$ do postaci ogólnej:

$$px-y-\frac{1}{2}p^2=0 \quad / \cdot 2$$
$$2px-2y-p^2=0$$

i układamy równanie, stosując wzór na odległość punktu od prostej.

$$\frac{|5-p^2|}{\sqrt{(2p)^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}$$

$$|5-p^2|=\sqrt{8p^2+8}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne.

$$25-10p^2+p^4=8p^2+8$$
$$p^4-18p^2+17=0$$

Podstawiamy $p^2=t$, gdzie $t\geqslant 0$, i otrzymujemy równanie: $t^2-18t+17=0$, które spełniają dwie liczby: $t_1=1, t_2=17$. Więc:

$p^2=1$ lub $p^2=17$,

$p\in\{-1,1,-\sqrt{17},\sqrt{17}\}$.

Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:
$y=-x-\frac{1}{2}$, $y=x-\frac{1}{2}$, $y=-\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$, $y=\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$.

**Sposób II**

Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny. Należy tak dobrać parametr $p$, by układ równań: $\begin{cases} y=px-\frac{1}{2}p^2 \\ x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2 \end{cases}$ miał dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$x^2+\left(px-\frac{1}{2}p^2+\frac{5}{2}\right)^2=2$$

$$x^2+p^2x^2+\frac{1}{4}p^4+\frac{25}{4}-p^3x+5px-\frac{5}{2}p^2-2=0$$

$$(1+p^2)x^2+(5p-p^3)x+\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}=0$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. prosta ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem) wtedy, gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest równy zero.

$$\Delta=0$$

$$(5p-p^3)^2-4(1+p^2)\left(\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}\right)=0$$

$$25p^2-10p^4+p^6-(1+p^2)(p^4-10p^2+17)=0$$

Po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie:
$p^4-18p^2+17=0$, które spełniają liczby: $p\in\{-1,1,-\sqrt{17},\sqrt{17}\}$.
Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:
$y=-x-\frac{1}{2}$, $y=x-\frac{1}{2}$, $y=-\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$, $y=\sqrt{17}x-\frac{17}{2}$.

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ........ **1 pkt**

Zdający zapisze współrzędne punktu leżącego na paraboli w zależności od jednej zmiennej, np. $P=\left(p,\frac{1}{2}p^2\right)$ oraz wyznaczy pochodną funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x^2$: $f'(x)=x$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ........ **2 pkt**

Zdający wyznaczy funkcję pochodną: $f'(x)=x$ i poda współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności, np. $a=f'(p)=p$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ........ **3 pkt**

Zdający wyznaczy równanie stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności: $y=px-\frac{1}{2}p^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ........ **4 pkt**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku styczności prostej do okręgu, np. $\frac{|5-p^2|}{\sqrt{(2p)^2+(-2)^2}}=\sqrt{2}$ lub $(5p-p^3)^2-4(1+p^2)\left(\frac{1}{4}p^4-\frac{5}{2}p^2+\frac{17}{4}\right)=0$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ........................................ **5 pkt**

Zdający poda rozwiązania równania: $p \in \{-1, 1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania), ale otrzyma cztery styczne.

**Rozwiązanie pełne** ........................................ **6 pkt**

Zdający poda równania wspólnych stycznych paraboli i okręgu: $y = -x - \frac{1}{2}$, $y = x - \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{17}x - \frac{17}{2}$, $y = \sqrt{17}x - \frac{17}{2}$.

**Zadanie 15. (0–7)**

Prosta o równaniu: $y = a^2x + 3a$ przecina hiperbolę o równaniu: $y = \frac{4}{x}$ w dwóch punktach, $A$ i $B$. Wyraź długość odcinka $AB$ w zależności od wartości parametru $a < 0$. Wyznacz równanie prostej, która przecina opisaną hiperbolę tak, że długość odcinka $AB$ jest najmniejsza.

| Wymaganie ogólne | Wymagania szczegółowe |
|---|---|
| III. Modelowanie matematyczne. | R11.6. Rachunek różniczkowy.<br>Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.<br>R3.3. Równania i nierówności.<br>Zdający rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych.<br>P8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej.<br>Zdający oblicza odległość dwóch punktów. |

**Przykładowe rozwiązanie**

Wyznaczamy współrzędne punktów wspólnych prostej i hiperboli. W tym celu rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}, \quad \text{gdzie } x \neq 0 \text{ i } a < 0$$

$$a^2x + 3a = \frac{4}{x}$$

$$a^2x^2 + 3ax - 4 = 0$$

$$\Delta = (3a) - 4 \cdot a^2 \cdot (-4) = 25a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 5|a| = -5a, \quad \text{bo } a < 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a} \\ y_1 = 4a \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{a} \\ y_2 = -a \end{cases}$$

Prosta i hiperbola mają zatem dwa punkty wspólne: $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right)$, $B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$.
Obliczamy długość odcinka $AB$.

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{a}\right)^2 + (4a + a)^2}$$

$$|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}, \quad \text{gdzie } a \in (-\infty, 0)$$

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$, $D_f = (-\infty, 0)$.

Funkcja $g(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca w przedziale $\langle 0, \infty)$ z czego wynika, że funkcje $|AB|$ i $f$ mają takie same przedziały monotoniczności, a ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) przyjmują dla tych samych argumentów.

Wyznaczamy pochodną funkcji $f$.

$$f'(a) = \frac{4a^5 - 2a(1 + a^4)}{a^4}$$

$$f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}, \quad D_{f'} = D_f = (-\infty, 0)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej.

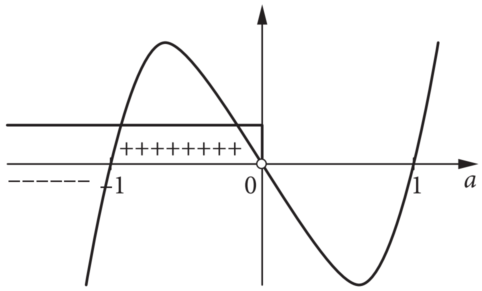
$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^5 - 2a = 0$$

$$2a(a-1)(a+1)(a^2+1) = 0$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1$$

$$a_1, a_2 \notin D_f$$

Badamy znak pochodnej w dziedzinie. Ponieważ mianownik pochodnej jest dodatni, wystarczy zbadać znak licznika.




$f'(a) < 0$ dla $a \in (-\infty, -1)$ oraz $f'(a) > 0$ dla $a \in (-1, 0)$.

Zatem funkcja $f$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -1, 0)$. Wynika stąd, że dla $a = -1$ funkcja $f$ osiąga wartość najmniejszą, więc i długość odcinka $AB$ jest najmniejsza, gdy $a = -1$.

Szukana prosta jest więc określona równaniem: $y = x - 3$.

**Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy** to:

**a)** zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$ oraz wyprowadzenie z niego równania z jedną niewiadomą i parametrem $a$, np. $a^2x + 3a = \frac{4}{x}$;

**b)** wyznaczenie współrzędnych punktów wspólnych prostej i hiperboli w zależności od wartości parametru $a < 0$, np. $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right)$, $B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$;

**c)** zapisanie długości odcinka $AB$ jako funkcji zmiennej $a$: $|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}$, gdzie $a \in (-\infty, 0)$.

Zdający otrzymuje po **1 punkt** za realizację każdej z części tego etapu.

**Etap drugi** to:

**a)** wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$: $f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}$;

**b)** obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$;

**c)** uzasadnienie, że funkcja $f$ osiąga wartość najmniejszą dla $a = -1$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**
W uzasadnieniu przyjmowania wartości najmniejszej nie wystarcza stwierdzenie, że skoro pochodna zmienia znak „z $-$ na $+$", to dla $a = -1$ funkcja $f$ osiąga minimum. Uzasadnienie uznajemy za poprawne, jeżeli ze znaku pochodnej zdający określi przebieg funkcji **w dziedzinie** (np. poda przedziały monotoniczności, zbuduje tabelę przebiegu zmienności lub naszkicuje wykres) i stąd wywnioskuje fakt, że funkcja $f$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = -1$.

**Etap trzeci** to wyznaczenie równania prostej, która przecina hiperbolę o równaniu $y = \frac{4}{x}$ tak, że długość odcinka $AB$ jest najmniejsza: $y = x - 3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwagi**
1. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka $AB$ w zależności od zmiennej $a$, popełniając błąd rachunkowy, który nie ułatwia znacząco dalszych obliczeń, to może otrzymać co najwyżej **6 punktów**.

2. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka $AB$ w zależności od zmiennej $a$, popełniając błąd merytoryczny, i otrzyma zupełnie inną funkcję (np. wielomian), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (za etap I).