

## Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	A	C	C	B	C	A	B	C	A	D	B	C	D	B	D	C	A	B	A	A	A	C	B	A	A

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność  $x^2 - 14x + 24 > 0$ .

#### I sposób rozwiązania

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki tego trójmianu:

$$\Delta = 100, \quad x_1 = \frac{14-10}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{14+10}{2} = 12$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 + x_2 = 14 \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = 24$$

i stąd  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 12$

albo

- zapisujemy nierówność w postaci  $(x-2)(x-12) > 0$ . Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:

- grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,

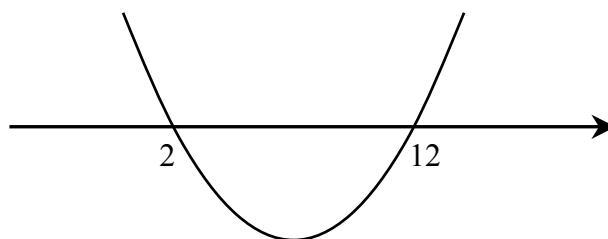
- korzystając z postaci kanonicznej

$$(x-7)^2 - 25 = (x-7+5) \cdot (x-7-5) = (x-2)(x-12),$$

- podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 12$

Podajemy rozwiązanie nierówności:  $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

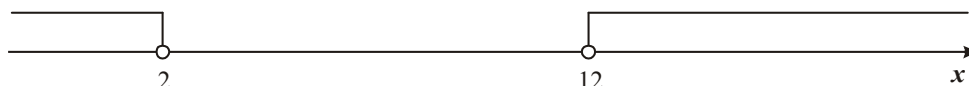
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < 2$  lub  $x > 12$  lub  $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$  lub  $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < 2$ ,  $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



**II sposób rozwiązania**

Zapisujemy nierówność w postaci

$$(x - 7)^2 - 25 > 0, \text{ a następnie}$$

$$(x - 7)^2 > 5, \text{ a stąd}$$

$$|x - 7| > 5, \text{ więc } x < 2 \text{ lub } x > 12.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy doprowadzi nierówność do postaci  $|x - 7| > 5$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

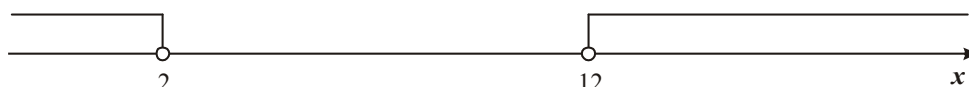
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < 2$  lub  $x > 12$  lub  $x \in (-\infty, 2) \cup (12, \infty)$  lub  $(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < 2$ ,  $x > 12$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



**Uwagi:**

1. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający od razu poda właściwą sumę przedziałów.
2. Przyznajemy **2 punkty** za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x = 2$ ,  $x = 12$  i zapisze np.:  $x \in (-\infty, -2) \cup (12, \infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków.
3. Przyznajemy **1 punkt** za rozwiązanie, w którym zdający popełni błąd w obliczaniu pierwiastków (np. wstawi do wzoru  $\Delta$  zamiast  $\sqrt{\Delta}$ ,  $b$  zamiast  $-b$  lub  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2c}$  zamiast  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , popełni błąd stosując wzory Viète'a) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
4. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który otrzyma niedodatni wyróżnik trójmianu kwadratowego, nawet jeśli konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca (rozwiązuje inne zadanie).
5. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który rozwiązuje nierówność inną niż w treści zadania.
6. W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki **akceptujemy zapis**, np.  $x \in (-\infty, 2)$  i  $x \in (12, \infty)$ , ale tylko wówczas gdy zapisowi temu towarzyszy poprawna interpretacja geometryczna.

**Zadanie 27. (2 punkty)**

Rozwiąż równanie  $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$ .

**I sposób rozwiązania (grupowanie wyrazów)**

Stosując metodę grupowania otrzymujemy:

$$x^2(x-3) + 2(x-3) = 0 \text{ albo } x(x^2+2) - 3(x^2+2) = 0 \text{ stąd}$$

$$(x-3)(x^2+2) = 0, \text{ a stąd}$$

$$x = 3.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można doprowadzić do postaci iloczynowej, np.:  $x^2(x-3) + 2(x-3) = 0$  lub  $x(x^2+2) - 3(x^2+2) = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy poda rozwiązanie  $x = 3$ .

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający otrzyma rozwiązanie  $x = 3$  i poda dodatkowo inne rzeczywiste rozwiązanie, to otrzymuje 1 pkt.
2. Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje 1 pkt.

### **II sposób rozwiązania (dzielenie)**

Sprawdzamy, że  $W(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$ , więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest  $x = 3$ .

Dzielimy wielomian przez dwumian  $x - 3$  i otrzymujemy  $x^2 + 2$ . Mamy więc równanie w postaci  $(x - 3) \cdot (x^2 + 2) = 0$  a stąd otrzymujemy  $x = 3$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian  $x - 3$ , otrzyma iloraz  $x^2 + 2$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy,

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy poda rozwiązanie  $x = 3$ .

### **Zadanie 28. (2 punkty)**

Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 26, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 70. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

### **I sposób rozwiązania**

Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę pięciu początkowych

wyrazów tego ciągu i zapisujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ \frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 70 \end{cases}$$
. Rozwiązujemy układ

równań i obliczamy  $a_1$ :

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ 2a_1 + 4r = 28 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4r = 26 - a_1 \\ 2a_1 + 26 - a_1 = 28 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4r = 26 - a_1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

### **II sposób rozwiązania**

Korzystamy ze wzoru na sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie  $\frac{a_1 + 26}{2} \cdot 5 = 70$ . Następnie obliczamy  $a_1 = 2$ .

### **III sposób rozwiązania**

Wypisujemy pięć kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego spełniającego podane warunki: 2, 8, 14, 20, 26, zatem  $a_1 = 2$ .

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy:

- zapisze układ równań, np. 
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 26 \\ \frac{2a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = 70 \end{cases}$$
 lub równanie, np.  $\frac{a_1 + 26}{2} \cdot 5 = 70$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy  
albo
- błędnie obliczy  $a_1$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy obliczy  $a_1 = 2$ .

**Uwaga:**

1. Jeśli zdający poda tylko  $a_1 = 2$  albo  $a_1 = 2$  i  $r = 6$  to przyznajemy 1 punkt.
2. Zdający otrzymuje 2 punkty, jeżeli wypisze pięć początkowych wyrazów tego ciągu: 2, 8, 14, 20, 26.

**Zadanie 29. (2 punkty)**

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie  $S = (4, -2)$  i przechodzącego przez punkt  $O = (0, 0)$ .

**I sposób rozwiązania** (z tw. Pitagorasa)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$
- zaznaczamy współrzędne środka okręgu w prostokątnym układzie współrzędnych oraz punkt, przez który przechodzi ten okrąg
- obliczamy długość promienia  $r = |SO|$ :

$$r^2 = 4^2 + 2^2 \quad r = \sqrt{20}$$

- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej:  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20$  lub ogólnej  $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$  lub  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + C = 0$  na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane zadania  
albo

- wykorzysta fakt, że okrąg przechodzi przez punkt  $O = (0, 0)$ , błędnie wyznaczy długość promienia okręgu np.  $r = \sqrt{12}$  i konsekwentnie do tego zapisze równanie  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 12$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt  $S_1 = (-2, 4)$  i konsekwentnie do tego zapisze równanie  $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$  lub ogólnej  $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ .

**II sposób rozwiązania** (odległość między dwoma punktami)

- zapisujemy równanie okręgu w postaci np.:  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$
- obliczamy odległość punktu  $O = (0, 0)$  od środka okręgu:

$$|OS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20}$$

- podajemy równanie okręgu w postaci kanonicznej:  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$  lub ogólnej  $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy:

- wykorzysta współrzędne środka i zapisze równanie okręgu w postaci  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = r^2$  lub  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + C = 0$  na tym poprzestając albo dalej błędnie interpretuje dane z zadania (np. zamiast  $r^2$  może być dowolna liczba dodatnia)

albo

- obliczy długość promienia okręgu korzystając z odległości dwóch punktów np.  $|OS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  i nie poda równania okręgu lub poda je błędnie np.  $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 20$

albo

- błędnie przyjmie, że środkiem okręgu jest punkt  $S_1 = (-2, 4)$  i konsekwentnie do tego zapisze równanie  $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$

albo

- wyznaczy równanie okręgu popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

- zapisze równanie okręgu w postaci kanonicznej  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$  lub ogólnej  $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ .

**Uwaga:**

Jeśli zdający zapisze od razu wzór  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$  to przyznajemy 2 punkty.

**Zadanie 30. (2 punkty)**

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach  $A = (3, 8)$ ,  $B = (1, 2)$ ,  $C = (6, 7)$  jest prostokątny.

**I sposób rozwiązania** (z tw. Pitagorasa)

- Obliczamy długości boków trójkąta  $|AB| = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = 5\sqrt{2}$
- Obliczamy sumę kwadratów dwóch boków trójkąta, np.  
 $|AB|^2 + |AC|^2 = 40 + 10 = 50 = |BC|^2$

Możemy w takim przypadku wywnioskować, że dane wierzchołki  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$   
albo
- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie wyciągnie wnioski

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.

- obliczy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ , skorzysta z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa i stwierdzi na tej podstawie, że trójkąt jest prostokątny.

**II sposób rozwiązania** (współczynniki kierunkowe prostych)

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$

$$a_{AB} = \frac{2-8}{1-3} = 3, \quad a_{AC} = \frac{7-8}{6-3} = -\frac{1}{3}, \quad a_{BC} = \frac{7-2}{6-1} = 1$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych  $AB$  i  $BC$  jest równy  $-1$ , więc są to proste prostopadłe, a tym samym trójkąt  $ABC$  jest trójkątem prostokątnym.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy współczynniki kierunkowe prostych  $AB$  i  $AC$  i na tym poprzestanie

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy

- przeprowadzi pełne rozumowanie, np. wyznaczy iloczyn współczynników kierunkowych prostych  $AB$  i  $BC$  i stwierdzi, że proste są prostopadłe, więc trójkąt jest prostokątny.

**III sposób rozwiązania** (iloczyn skalarny)

Obliczamy współrzędne wektorów  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  i  $\vec{BC}$ :  $\vec{AB} = [-2, -6]$ ,  $\vec{AC} = [3, -1]$  i  $\vec{BC} = [5, 5]$ .

Obliczamy iloczyn skalarny wektorów  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) = 0$ .

Jeżeli iloczyn skalarny wektorów równa się zero to wektory są prostopadłe, a tym samym trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy współrzędne wektorów  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$  i na tym poprzestanie.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy

- przeprowadzi pełne rozumowanie wykaże za pomocą wektorów, że trójkąt jest prostokątny.

**IV sposób rozwiązania** (okrąg opisany na trójkącie prostokątnym)

Obliczamy długości boków trójkąta  $|AB| = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = 5\sqrt{2}$ .

Jeżeli trójkąt  $ABC$  jest prostokątny to środek najdłuższego boku jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$  jest  $|BC|$ , więc wyznaczamy współrzędne środka odcinka

$$BC: S = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Obliczamy odległość punktu  $S$  od wierzchołków  $A, B, C$ :  $|BS| = |SC| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$|AS| = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - 8\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Odległość środka odcinka  $BC$  jest taka sama od wszystkich wierzchołków trójkąta  $ABC$ , więc trójkąt ten jest prostokątny.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- obliczy długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

albo

- obliczy długość jednego boku z błędem, a pozostałe poprawnie i konsekwentnie do tego wyciągnie poprawny wniosek

albo



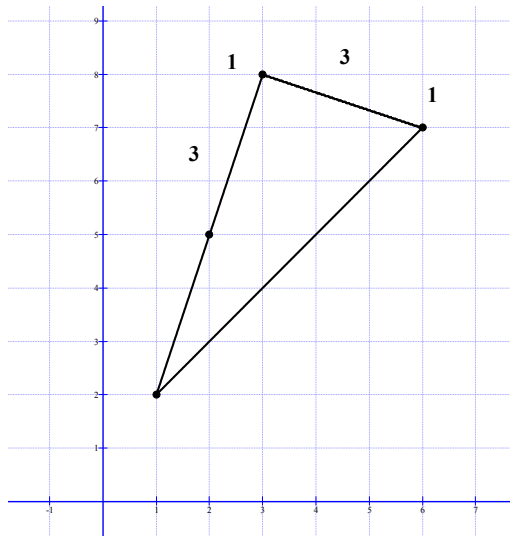
- wyznaczy współrzędne  $S = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$  środka odcinka  $BC$  i obliczy długość odcinka  $AS$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie

- wykaże, że  $BC$  jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  i stwierdzi, że ten trójkąt jest prostokątny

**V sposób rozwiązania** (graficzny)

Zaznaczamy wierzchołki trójkąta  $A = (3, 8)$ ,  $B = (1, 2)$ ,  $C = (6, 7)$



Wykazujemy, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych.

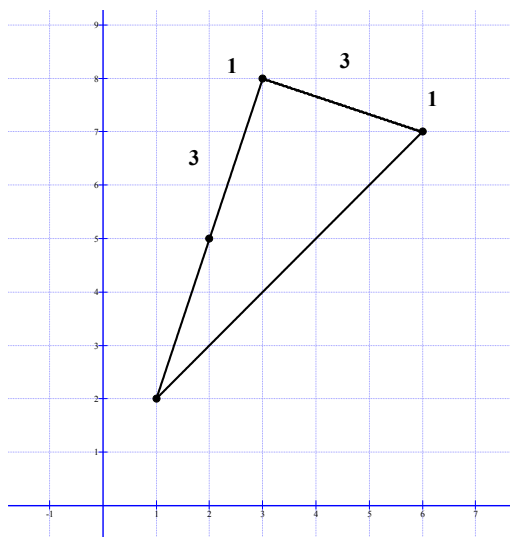
**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**  
gdy

- na podstawie punktów kratowych poda długości boków trójkąta  $ABC$ :  
 $|AB| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $|AC| = \sqrt{10}$ ,  $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.

- wykaże, że trójkąt jest prostokątny na podstawie dokładnego rysunku w układzie współrzędnych, np.



**Uwaga:**

Jeżeli zdający na rysunku jak wyżej wyróżni oprócz wierzchołków tylko punkt kratowy o współrzędnych  $(2, 5)$  i na tym poprzestanie, to otrzymuje 1 punkt.

**Zadanie 31. (2 punkty)**

Wykaż, że jeżeli  $a > 0$  i  $b > 0$  oraz  $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$ , to  $a = b$  lub  $a + b = 1$ .

**Rozwiązanie**

Przekształcamy równość zapisaną z treści zadania

$$\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2} \quad |(\ )^2$$

$$a^2 + b = a + b^2$$

$$a^2 - b^2 + b - a = 0$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a - b = 0 \text{ lub } a + b - 1 = 0$$

$$a = b \text{ lub } a + b = 1$$

co należało wykazać.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy poprawnie przekształci równość  $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$  pozbywając się pierwiastków i w otrzymanej równości zastosuje wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, pisząc np.:  $(a - b)(a + b) - a + b = 0$  i tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie zakończone wnioskiem, że  $a = b$  lub  $a + b = 1$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający podstawili konkretne wartości w miejsce  $a$  i  $b$ , to przyznajemy **0 punktów**.

**Zadanie 32. (4 punkty)**

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty.

**I sposób rozwiązania** (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary  $(x, y)$  liczb naturalnych ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny,  $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ .

Oznaczając przez  $A$  zdarzenie - suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty, otrzymujemy

$$A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}, |A| = 3 \text{ i } P(A) = \frac{1}{12}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  albo wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :  $A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  i  $A = \{(5, 3), (3, 5), (5, 5)\}$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  i  $|A| = 3$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

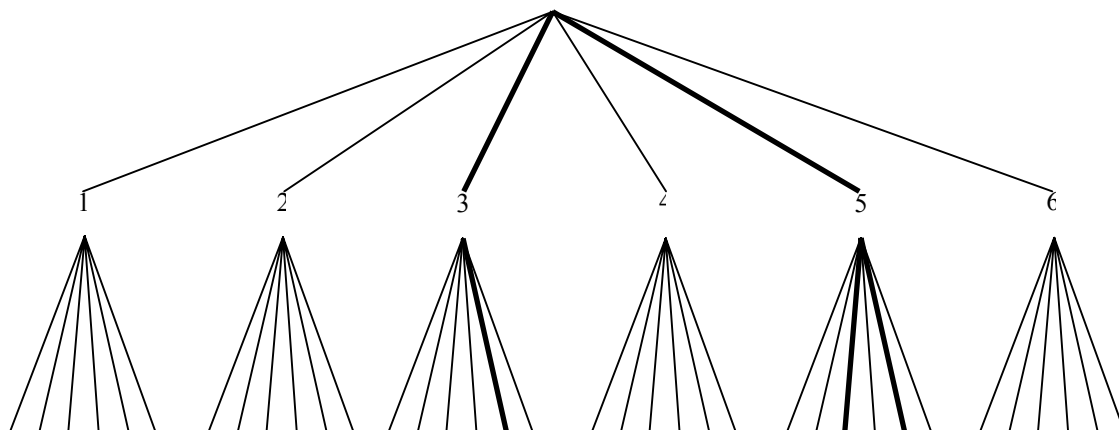
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{1}{12}$

**Uwaga**

Jeśli zdający zapisze, że  $P(A) > 1$ , to otrzymuje 0 pkt.

**II sposób rozwiązania** (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo dla danego doświadczenia losowego. Prawdopodobieństwo na każdym jego odcinku jest równe  $\frac{1}{6}$ . Pogrubione gałęzie ilustrują zdarzenie opisane w treści zadania.



Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ .

**Uwaga:**

Możemy narysować fragment drzewa - pogrubione gałęzie na rysunku.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**  
Zdający narysuje drzewo i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**  
Zdający narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Uwagi:**

- Oceniamy rozwiązanie na 0 punktów, gdy w dalszej części rozwiązania zdający dodaje prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo mnoży otrzymane iloczyny zamiast dodawać.
- Dopuszcza się błąd w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa (traktujemy jako błąd nieuwagi).
- Jeżeli zdający opisał prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli zdający narysował „inteligentne drzewo” i opisał prawdopodobieństwa na jego gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania”.
- Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje 2 punkty.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**  
• Zdający wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach).

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**  
Obliczenie prawdopodobieństwa:  $\frac{1}{12}$

**III sposób rozwiązania** (tabela)

Rysujemy tabelę o wymiarach 6x6, w tabeli jest 36 pól. Zaznaczamy pola sprzyjające zdarzeniu opisanemu w treści zadania i obliczamy prawdopodobieństwo.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Tak jak w I sposobie.**

**Zadanie 33. (4 punkty)**

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny  $ABCDEF$  o podstawach  $ABC$  i  $DEF$  i krawędziach bocznych  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$ . Oblicz pole trójkąta  $ABF$  wiedząc, że  $|AB|=10$  i  $|CF|=11$ . Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt  $ABF$ .

**I sposób rozwiązania**

Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy  $|SC|=5\sqrt{3}$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $SCF$

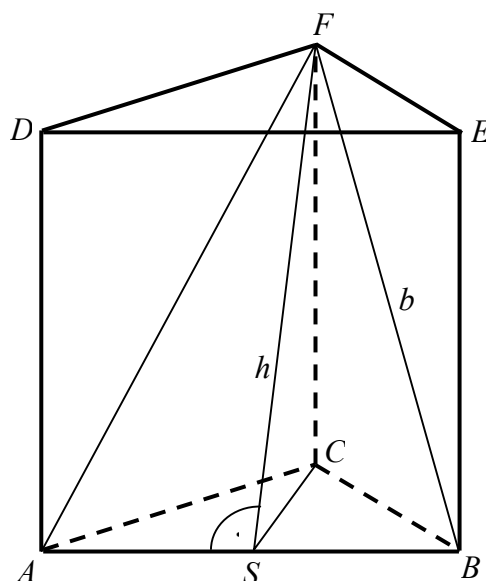
dostajemy  $h = \sqrt{11^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{196} = 14$ , więc

pole trójkąta  $ABF$  jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 = 70.$$

Uwaga 1.

Zamiast obliczać  $|SC|=5\sqrt{3}$  możemy również obliczyć z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BEF$  długość przeciwprostokątnej  $BF$  tego trójkąta ( $b = \sqrt{11^2 + 10^2}$ ,  $b = \sqrt{221} \approx 14,87$ ), a dalej z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $SBF$  długość odcinka  $FS$ , czyli  $h$  ( $h = \sqrt{221 - 25} = \sqrt{196} = 14$ ).



**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**  
Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta  $ABF$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

- obliczenie wysokości  $SC$  trójkąta równobocznego  $ABC$ :  $|SC|=5\sqrt{3}$

albo

- obliczenie długości przekątnej ściany bocznej  $b = |AF|$ :  $b = \sqrt{221}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie  $h = |FS|$  wysokości trójkąta  $ABF$ :  $h = 14$ .

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki ..... 2 pkt**

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Obliczenie pola trójkąta  $ABF$ :  $P = 70$ .

## **II sposób rozwiązania**

- 1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta  $ABF$ .
- 2) Obliczenie  $b = |AF|$  (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ACF$ :  $b = \sqrt{11^2 + 10^2}$  stąd  $b = \sqrt{221} \approx 14,87$ .
- 3) Obliczenie  $p$  połowy obwodu trójkąta  $ABF$ :  $p = \frac{10 + 2\sqrt{221}}{2} = 5 + \sqrt{221}$ .
- 4) Obliczenie pola trójkąta  $ABF$  np. ze wzoru Herona:  
$$P = \sqrt{(\sqrt{221} + 5) \cdot (\sqrt{221} + 5 - \sqrt{221})^2 \cdot (\sqrt{221} + 5 - 10)} = \sqrt{25(\sqrt{221} - 5)(\sqrt{221} + 5)}$$
$$P = 70.$$

## **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**  
Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta  $ABF$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**  
Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej  $b = |AF|$ :  $b = \sqrt{221}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**  
Obliczenie  $p$  połowy obwodu trójkąta  $ABF$ :  $p = \sqrt{221} + 5$ .

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki ..... 2 pkt**

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**  
Obliczenie pola trójkąta  $ABF$ :  $P = 70$ .

### Uwaga:

Jeżeli zdający zastosuje poprawnie wzór Herona, doprowadzając rozwiązanie do końca, ale w trakcie obliczania pola popełni błąd rachunkowy wcześniej bezbłędnie obliczając połowę obwodu trójkąta, to otrzymuje 3 punkty za całe rozwiązanie.

## **III sposób rozwiązania**

- 1) Narysowanie graniastosłupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta  $ABF$ .
- 2) Obliczenie  $b = |AF|$  (długości przekątnej ściany bocznej) z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ACF$ :  $b = \sqrt{11^2 + 10^2}$ , stąd  $b = \sqrt{221} \approx 14,87$ .
- 3) Obliczenie cosinusa kąta  $AFB$ :  $|AB|^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos|\sphericalangle AFB|$ ,  
$$100 = 2 \cdot 221 - 2 \cdot 221 \cos|\sphericalangle AFB|$$
 stąd  $\cos|\sphericalangle AFB| = \frac{171}{221}$
- 4) Obliczenie sinusa kąta  $AFB$   $\sin|\sphericalangle AFB| = \sqrt{1 - \left(\frac{171}{221}\right)^2}$ :  $\sin|\sphericalangle AFB| = \frac{140}{221}$ .
- 5) Obliczenie pola trójkąta  $ABF$  ze wzoru  $P = \frac{b^2 \sin|\sphericalangle AFB|}{2}$ :  $P = 70$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Narysowanie graniastoslupa i zaznaczenie na rysunku trójkąta  $ABF$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej  $b = |AF|$ :  $b = \sqrt{221}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 pkt**

Obliczenie sinusa kąta  $AFB$ :  $\sin|\sphericalangle AFB| = \frac{140}{221}$ .

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania**

**zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki..... 2 pkt**

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 4 pkt**

Obliczenie pola trójkąta  $ABF$ :  $P = 70$ .

**Zadanie 34. (5 punktów)**

Kolarz przejechał trasę długości 60 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 1 km/h, to przejechałby tę trasę w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

**Rozwiązanie**

Oznaczamy przez  $v$  średnią prędkość kolarza, a przez  $t$  czas pokonania całej trasy w godzinach.

Z warunków zadania zapisujemy

$$60 = (v+1)(t-0,1) \quad \text{lub} \quad v+1 = \frac{60}{t-0,1} \quad \text{lub} \quad t-0,1 = \frac{60}{v+1}$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ 60 = (v+1)(t-0,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{60}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60 = (v+1)\left(\frac{60}{v} - 0,1\right) \end{cases}$$

$$60 = \frac{60(v+1)}{v} - 0,1(v+1) \cdot v$$

$$60v = 60v + 60 - 0,1v^2 - 0,1v$$

$$0,1v^2 + 0,1v - 60 = 0 \cdot 10$$

$$v^2 + v - 600 = 0$$

$$\Delta = 2401$$

$$v_1 = 24 \quad \text{lub} \quad v_2 = -25$$

$v_2$  nie spełnia warunków

zadania ( $v > 0$ )

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ v+1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

$$60t + t^2 - 0,1t - 6 = 60t$$

$$t^2 - 0,1t - 6 = 0$$

$$\Delta = 24,01$$

$$t_1 = 2,5 \quad \text{lub} \quad t_2 = -2,4$$

$t_2$  nie spełnia

warunków zadania

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ t-0,1 = \frac{60}{v+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{60}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1} \end{cases}$$

$$(60+t)(t-0,1) = 60t$$

i dalej jak w poprzednim rozwiązaniu.

zadania ( $v > 0$ )

( $t > 0$ )

Obliczamy

$$v = \frac{60}{2,5} = 24$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzające niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zapisać równanie w sytuacji domniemanej ( $t$  oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach, a  $v$  średnią prędkość kolarza w kilometrach na godzinę)

- $60 = (v+1)(t-0,1)$

albo

- $v+1 = \frac{60}{t-0,1}$

albo

- $t-0,1 = \frac{60}{v+1}$

albo

$$v \cdot t = 60$$

### Uwaga

Przyznajemy 0 pkt, jeżeli zdający napisze, że  $60 = (v+1)(t+0,1)$  lub równoważne (tzn. wg zdającego kolarz jadący szybciej jedzie dłużej).

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zapisać układ równań z niewiadomymi  $v$  i  $t$  - odpowiednio z prędkością i czasem

$$\begin{cases} 60 = v \cdot t \\ 60 = (v+1)(t-0,1) \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} 60 = v \cdot t \\ v+1 = \frac{60}{t-0,1} \end{cases} \text{ albo } \begin{cases} 60 = v \cdot t \\ t-0,1 = \frac{60}{v+1} \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Sprzedaż do równania wymiernego z jedną niewiadomą  $v$  lub  $t$ , np.:

$$60 = (v+1) \left( \frac{60}{v} - 0,1 \right) \text{ lub } \frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1} \text{ lub } t-0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1}$$

### Uwaga:

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

**Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki ..... 2 pkt**

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

- rozwiązanie równania  $60 = (v+1) \left( \frac{60}{v} - 0,1 \right)$  z błędem rachunkowym



- rozwiązanie równania  $\frac{60}{t} + 1 = \frac{60}{t-0,1}$  lub  $t-0,1 = \frac{60}{\frac{60}{t} + 1}$  bezbłędnie:  $t = -2,4$  h lub  $t = 2,5$  h i nieobliczenie prędkości
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $t$  z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie prędkości

**Uwaga**

Zdający otrzymuje również 4 pkt za doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego:

$$v^2 + v - 600 = 0 \quad \text{lub} \quad t^2 - 0,1t - 6 = 0$$

lub za otrzymanie tego równania kwadratowego bezpośrednio z układu równań.

**Rozwiązanie bezbłędne ..... 5 pkt**

Obliczenie średniej prędkości, z jaką jechał kolarz:  $v = 24$  km/h.