# LUBELSKA PRÓBA PRZED MATURĄ DLA KLAS TRZECICH

POZIOM PODSTAWOWY

GRUPA I

12 STYCZNIA 2011

CZAS PRACY: 170 MINUT

## Zadania zamknięte

### ZADANIE 1 (1 PKT.)

Liczba $\sqrt{44}+\sqrt{176}$ jest równa

A) $\sqrt{220}$ B) $8\sqrt{11}$ C) $6\sqrt{11}$ D) $6\sqrt{13}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\sqrt{44}+\sqrt{176}=\sqrt{4\cdot 11}+\sqrt{16\cdot 11}=2\sqrt{11}+4\sqrt{11}=6\sqrt{11}.$$

Odpowiedź: **C**

### ZADANIE 2 (1 PKT.)

Liczba $2^{10}\cdot 4^{10}\cdot 8^{10}$ jest równa

A) $2^{1000}$ B) $2^{60}$ C) $64^{30}$ D) $64^{1000}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$2^{10}\cdot 4^{10}\cdot 8^{10}=2^{10}\cdot (2^2)^{10}\cdot (2^3)^{10}=$$
$$=2^{10}\cdot 2^{20}\cdot 2^{30}=2^{10+20+30}=2^{60}.$$

Odpowiedź: **B**

### ZADANIE 3 (1 PKT.)

Rozwiązaniem równania $\sqrt{2}(x-2)=3x$ jest liczba

A) $\sqrt{2}-3$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ C) $\frac{4+6\sqrt{2}}{11}$ D) $-\frac{4+6\sqrt{2}}{7}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(x-2) = 3x\\
&(\sqrt{2}-3)x = 2\sqrt{2} \quad / : (\sqrt{2}-3)\\
&x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}\\
&x = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)} = \frac{4+6\sqrt{2}}{2-9} = -\frac{4+6\sqrt{2}}{7}.
\end{aligned}$$

---

**Odpowiedź: D**



ZADANIE 4 (1 PKT.)

Suma wyrażeń $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \frac{x}{5}$ jest równa

A) $\frac{4x}{14}$ B) $\frac{4x}{60}$ C) $\frac{77x}{60}$ D) $\frac{x}{60}$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5} = \frac{30x}{60}+\frac{20x}{60}+\frac{15x}{60}+\frac{12x}{60} = \frac{77x}{60}.$$

---

**Odpowiedź: C**

ZADANIE 5 (1 PKT.)

Pierwiastkami równania $x^3 - x^2 - 6x = 0$ są liczby

A) $0, -2, 3$ B) $-2, 3$ C) $0, -3, 2$ D) $-3, -2$

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$0 = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6).$$

Zatem jednym z pierwiastków jest $x = 0$. Aby znaleźć pozostałe szukamy pierwiastków trójmianu w nawiasie.

$$\begin{aligned}
&x^2 - x - 6 = 0\\
&\Delta = 1 + 24 = 25\\
&x = \frac{1-5}{2} = -2 \quad \vee \quad x = \frac{1+5}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Zatem pierwiastkami są $0, -2, 3$.

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 6 (1 PKT.)

Jeżeli suma kątów wewnętrznych wielokąta foremnego jest równa $1260^\circ$ to wielokąt ten ma wierzchołków:

A) 8 B) 10 C) 7 D) 9

### ROZWIĄZANIE

Przypomnijmy, że suma kątów w wielokącie wypukłym o $n$ wierzchołkach jest równa

$$180^\circ(n-2).$$

Wyznaczamy $n$

$$1260^\circ = 180^\circ(n-2) \quad \Rightarrow \quad 7 = n-2 \quad \Rightarrow \quad n = 9.$$

---

Odpowiedź: **D**

## ZADANIE 7 (1 PKT.)

Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ to to stosunek $\sin\alpha : \cos\alpha$ jest równy:

A) 4:3 B) 3:4 C) 1:1 D) 2:3

### ROZWIĄZANIE

Z definicji tangensa

$$\frac{3}{4} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

---

Odpowiedź: **B**

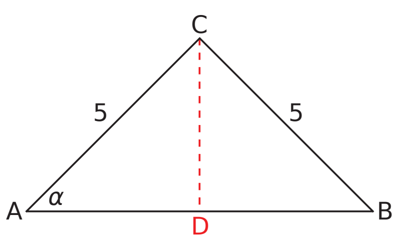
## ZADANIE 8 (1 PKT.)

W trójkącie równoramiennym o bokach długości: $5, 5, 5\sqrt{2}$ kąt przy podstawie ma miarę:

A) $45^\circ$ B) $60^\circ$ C) $30^\circ$ D) $90^\circ$

### ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od rysunku.




Liczymy

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$.

---

Odpowiedź: **A**

## ZADANIE 9 (1 PKT.)

Punkt przecięcia środkowych w trójkącie $ABC$, gdzie $A = (1, -3)$, $B = (2, 8)$, $C = (-6, 4)$ ma współrzędne:

A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ B) $(-1, 3)$ C) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D) $(-2, 6)$

## ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

na współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$. W naszej sytuacji mamy

$$S = \left(\frac{1 + 2 - 6}{3}, \frac{-3 + 8 + 4}{3}\right) = (-1, 3).$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 10 (1 PKT.)

Liczby $12$, $48$, $(x - 24)$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wówczas trzeci wyraz tego ciągu jest równy:

A) 192 B) 216 C) 60 D) 24

## ROZWIĄZANIE

Iloraz danego ciągu jest równy

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{48}{12} = 4.$$

Zatem

$$a_3 = a_2 q = 48 \cdot 4 = 192.$$

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 11 (1 PKT.)

Przekątna kwadratu $K$ ma długość 2, a obwód kwadratu $M$ ma długość 16. Skala podobieństwa kwadratu $K$ do kwadratu $M$ jest równa:

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) $2\sqrt{2}$

## ROZWIĄZANIE

Bok kwadratu $M$ ma długość

$$\frac{16}{4} = 4,$$

a jego przekątna ma długość

$$4\sqrt{2}.$$

Zatem skala podobieństwa jest równa

$$\frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

---

**Odpowiedź: A**

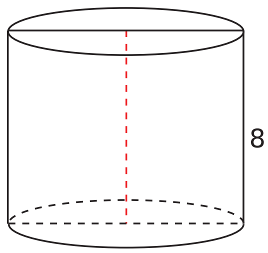
## ZADANIE 12 (1 PKT.)

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 8. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe:

A) $128\pi$ B) $64\pi$ C) $96\pi$ D) $32\pi$

## ROZWIĄZANIE

Zaczynamy od obrazka




Z obrazka widać, że promień podstawy walca jest równy połowie boku kwadratu, czyli $r = 4$. Zatem pole powierzchni bocznej jest równe

$$P_b = 2\pi r \cdot H = 8\pi \cdot 8 = 64\pi.$$

---

**Odpowiedź: B**

## ZADANIE 13 (1 PKT.)

Funkcja $f$ przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej liczbę jej dzielników będących liczbami naturalnymi. Wobec tego $f(150)$ jest równe:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 10

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że
$$150 = 6 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Każdy dodatni dzielnik tej liczby jest postaci $k = 2^a 3^b 5^c$, gdzie $a, b \in \{0, 1\}$ i $c \in \{0, 1, 2\}$. Na mocy zasady mnożenia liczby $a, b, c$ możemy wybrać na
$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$
sposobów.

---

**Odpowiedź: B**

ZADANIE 14 (1 PKT.)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 4x^2 + 8x + 5$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) < 5$ jest

A) $(-\infty, 2) \cup (0, +\infty)$ B) $(0, +\infty)$ C) $(0, 2)$ D) $(-2, 0)$

ROZWIĄZANIE

Liczymy.
$$\begin{aligned}
&4x^2 + 8x + 5 < 5\\
&4x^2 + 8x < 0 \quad / : 4\\
&x^2 + 2x < 0\\
&x(x + 2) < 0\\
&x \in (-2, 0).
\end{aligned}$$

---

**Odpowiedź: D**

ZADANIE 15 (1 PKT.)

Liczba $a$ stanowi 80% liczby $b$. O ile procent liczba $b$ jest większa od liczby $a$?

A) 25% B) 80% C) 20% D) 120%

ROZWIĄZANIE

Wiemy, że
$$a = 0,8b$$
Zatem
$$b = \frac{a}{0,8} = 1,25a,$$
czyli liczba $b$ jest większa od $a$ o 25%.

---

**Odpowiedź: A**

## ZADANIE 16 (1 PKT.)

Liczba $\log_2 8 - \log_2 16$ jest równa

A) 2 B) -1 C) 1 D) 2

## ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\log_2 8 - \log_2 16 = \log_2 2^3 - \log_2 2^4 = 3 - 4 = -1.$$

Jeżeli ktoś nie rozumie tego rachunku to niech zajrzy do poradnika o logarytmach.

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 17 (1 PKT.)

Osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 8$ jest prosta o równaniu

A) $x = 8$ B) $y = 0$ C) $x = -8$ D) $x = 0$

## ROZWIĄZANIE

Osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej jest pionowa prosta przechodząca przez jej wierzchołek.

### Sposób I

Pierwszą współrzędną wierzchołka łatwo wyznaczyć:

$$x_w = \frac{-b}{2a} = 0.$$

Zatem osią symetrii jest prosta $x = 0$.

### Sposób II

Parabola $y = x^2 + 8$ powstaje z paraboli $y = x^2$ przez przesunięcie o 8 jednostek do góry, zatem jej oś symetrii jest taka sama jak oś symetrii paraboli $y = x^2$, czyli prosta $x = 0$.

Odpowiedź: **D**

## ZADANIE 18 (1 PKT.)

Pewnego dnia w klasie liczącej 11 dziewcząt i 15 chłopców nieobecny był jeden chłopiec i jedna dziewczynka. Nauczyciel wybrał do odpowiedzi jednego ucznia. Prawdopodobieństwo, że będzie to dziewczynka jest równe:

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{5}{13}$

ROZWIĄZANIE

Tego dnia w klasie były

$$|\Omega| = 11 + 15 - 1 - 1 = 24$$

osoby i 10 z nich to dziewczynki. Zatem prawdopodobieństwo wybrania dziewczynki jest równe

$$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

---

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 19 (1 PKT.)

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$ jest

A) 3 B) 2 C) 2,5 D) -3

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{x-3} + 4 \quad / \cdot (x-3) \\
&2 + 4(x-3) = 0 \\
&2 + 4x - 12 = 0 \\
&4x = 10 \\
&x = 2,5.
\end{aligned}$$

---

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 20 (1 PKT.)

Wartość wyrażenia $2|x-3| - |x+1|$ dla $x \in (-\infty, -1)$ jest równa

A) $x - 7$ B) $-x + 7$ C) $3x - 7$ D) $-x - 7$

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że dla $x \in (-\infty, -1)$ mamy

$$\begin{aligned}
x - 3 < 0 \\
x + 1 < 0.
\end{aligned}$$

Zatem

$$2|x-3| - |x+1| = 2(-x+3) + (x+1) = -x + 7.$$

---

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 21 (1 PKT.)

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. Wówczas

A) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ B) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ C) $\sin\alpha < \frac{\sqrt{21}}{5}$ D) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{25}$

### ROZWIĄZANIE

Liczymy (z jedynki trygonometrycznej).

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Odpowiedź: **B**

## ZADANIE 22 (1 PKT.)

Prosta $k$ ma równanie $y = 3x - 15$. Wskaż równanie prostej prostopadłej do $k$.

A) $y = -3x - 15$ B) $y = 3x + 15$ C) $y = \frac{1}{3}x$ D) $y = -\frac{1}{3}x - 2$

### ROZWIĄZANIE

Proste $y = ax + b$ i $y = cx + d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $ac = -1$, zatem współczynnik kierunkowy szukanej prostej musi być równy $-\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: **D**

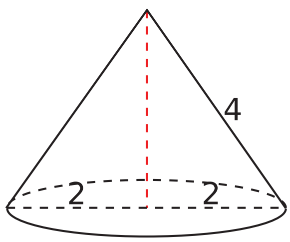
## ZADANIE 23 (1 PKT.)

Trójkąt równoboczny o boku długości 4 cm obrócono wokół prostej zawierającej wysokość trójkąta. Objętość powstałej bryły jest równa:

A) $14,5\ \text{cm}^3$ B) $4\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi\ \text{cm}^3$ D) $8\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$

### ROZWIĄZANIE

Szkicujemy obrazek.




Z obrazka widać, że otrzymamy stożek o promieniu podstawy równym połowie boku trójkąta, czyli $r = 2$. Wysokość stożka jest równa wysokości trójkąta równobocznego, czyli wynosi

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Zatem objętość jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}.$$

---

**Odpowiedź: C**

## ZADANIE 24 (1 PKT.)

Zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}$ jest dziedziną wyrażenia:

A) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$ B) $\frac{x^2-x-2}{x^3+5x^2+6x}$ C) $\frac{3x+2}{x(x-2)(x-3)}$ D) $\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}$

### ROZWIĄZANIE

Podana dziedzina oznacza, że mianownik interesującego nas wyrażenia musi się zerować dla $x = 0, x = -3$ i $x = 2$. Tę własność ma mianownik wyrażenia

$$\frac{2x+1}{x(x-2)(x+3)}.$$

---

**Odpowiedź: D**

## ZADANIE 25 (1 PKT.)

Ile jest liczb całkowitych wśród rozwiązań nierówności $|2x - \sqrt{17}| \leqslant 5$?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7

### ROZWIĄZANIE

**Sposób I**

Przekształćmy daną nierówność

$$\begin{aligned} |2x - \sqrt{17}| &\leqslant 5 \\ 2\left|x - \frac{\sqrt{17}}{2}\right| &\leqslant 5 \\ \left|x - \frac{\sqrt{17}}{2}\right| &\leqslant 2,5. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem nierówności są więc liczby, które są odległe od $\frac{\sqrt{17}}{2}$ o nie więcej niż 2,5. Jest to więc przedział

$$\left\langle \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{5}{2} \right\rangle.$$

Ponieważ

$$\frac{\sqrt{17}-5}{2} \approx -0,4$$
$$\frac{\sqrt{17}+5}{2} \approx 4,6.$$

nierówność spełnia 5 liczb całkowitych: 0,1,2,3,4.

## Sposób II

Liczymy

$$\begin{aligned}
&|2x-\sqrt{17}| \leqslant 5\\
&2x-\sqrt{17} \leqslant 5 \quad \text{i} \quad 2x-\sqrt{17} \geqslant -5\\
&2x \leqslant \sqrt{17}+5 \quad \text{i} \quad 2x \geqslant \sqrt{17}-5\\
&x \leqslant \frac{\sqrt{17}+5}{2} \quad \text{i} \quad x \geqslant \frac{\sqrt{17}-5}{2}.
\end{aligned}$$

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział

$$\left\langle \frac{\sqrt{17}-5}{2}, \frac{\sqrt{17}+5}{2} \right\rangle.$$

Jak w I sposobie stwierdzamy, że w przedziale tym jest 5 liczb całkowitych.

Odpowiedź: **A**

## Zadania otwarte

### ZADANIE 26 (2 PKT.)

Rozwiąż równanie $(x-1)^2 = 2(x+3)^2$.

### ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}
&(x-1)^2 = 2(x+3)^2\\
&x^2-2x+1 = 2(x^2+6x+9)\\
&0 = x^2+14x+17 = 0\\
&\Delta = 14^2-4\cdot 17 = 196-68 = 128 = (8\sqrt{2})^2\\
&x = \frac{-14-8\sqrt{2}}{2} = -7-4\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \frac{-14+8\sqrt{2}}{2} = -7+4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $x = -7-4\sqrt{2}$ **lub** $x = -7+4\sqrt{2}$

## ZADANIE 27 (2 PKT.)

Rozwiąż równanie $x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = (x+2)^2$.

## ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x + 4 &= (x+2)^2 \\ x^3 + 3x^2 + 2x + 4 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^3 + 2x^2 - 2x &= 0 \\ x(x^2 + 2x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Zatem jednym pierwiastkiem jest $x = 0$. Aby znaleźć pozostałe rozkładamy trójmian w nawiasie.

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - 2 = 0 \\ & \Delta = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \\ & x = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \quad \vee \quad x = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

---

Odpowiedź: $x \in \{-1 - \sqrt{3}, 0, -1 + \sqrt{3}\}$

## ZADANIE 28 (2 PKT.)

Podaj współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji $f$ z osią $Oy$, gdy funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{dla } x \in (-\infty, 2\rangle \\ x - 4 & \text{dla } x \in (2, +\infty). \end{cases}$

## ROZWIĄZANIE

Punkt wspólny wykresu funkcji $f$ z osią $Oy$ to punkt o współrzędnych

$$(0, f(0)) = (0, 5).$$

---

Odpowiedź: $(0, 5)$

## ZADANIE 29 (2 PKT.)

Uzasadnij, że nie istnieją dwie liczby, których suma jest równa 4, a iloczyn jest równy 5.

### ROZWIĄZANIE

Jeżeli $x$ i $y$ są takimi liczbami to spełniają układ równań

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5. \end{cases}$$

Podstawiamy $x = 4 - y$ z pierwszego równania do drugiego.

$$\begin{aligned} &(4-y)y = 5 \\ &4y - y^2 = 5 \\ &0 = y^2 - 4y + 5 \\ &\Delta = 16 - 20 < 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $\Delta < 0$ równanie to nie ma rozwiązań, co oznacza, że wyjściowy układ równań też nie ma rozwiązań.

### ZADANIE 30 (2 PKT.)

Sprawdź, czy odległość środka okręgu $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ od prostej $y - 2x + 3 = 0$ jest równa promieniowi okręgu.

### ROZWIĄZANIE

Dany okrąg ma środek $S = (2, -3)$ i promień $r = 2$. Obliczmy odległość punktu $S$ od danej prostej $y - 2x + 3 = 0$. Korzystamy ze wzoru na odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej $Ax + By + C = 0$:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

W naszej sytuacji mamy

$$\frac{|-3-4+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \approx 1,8.$$

Widać, że liczba ta nie jest równa 2.

---

Odpowiedź: **Nie, nie jest.**

### ZADANIE 31 (2 PKT.)

W trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Wykaż, że iloczyn sinusów tych kątów jest równy $\frac{1}{6}$.

ROZWIĄZANIE

## Sposób I

Jeżeli $\alpha$ jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego, to drugi kąt ostry ma miarę $90^\circ - \alpha$. Mamy więc równanie

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \cos\alpha + \sin\alpha &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\\ \sin\alpha + \cos\alpha &= \frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Podnieśmy tę ostatnią równość stronami do kwadratu.

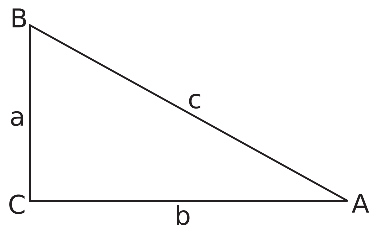
$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{4}{3}\\ 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{4}{3}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{1}{3}\\ \sin\alpha\cos\alpha &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że interesujący nas iloczyn sinusów jest równy

$$\sin\alpha\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{6}.$$

## Sposób II

Oznaczmy długości przyprostokątnych trójkąta przez $a$ i $b$, a długość przeciwprostokątnej przez $c$.




Mamy zatem

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \cos\measuredangle A + \cos\measuredangle B = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Podnosimy tę równość stronami do kwadratu (żeby skorzystać z twierdzenia Pitagorasa).

$$\frac{4}{3} = \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2} = \frac{c^2+2ab}{c^2}$$
$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{2ab}{c^2}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2ab}{c^2} \qquad / : 2$$
$$\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{6}.$$

Teraz pozostało zauważyć, że

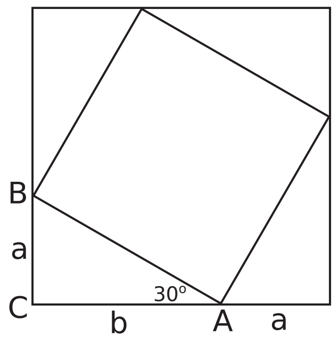
$$\sin\measuredangle A \sin\measuredangle B = \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} = \frac{ab}{c^2} = \frac{1}{6}.$$

ZADANIE 32 (5 PKT.)

W kwadrat wpisano drugi kwadrat, którego wierzchołki leżą na bokach pierwszego i boki tworzą z bokami pierwszego kwadratu kąty o miarach 30°. Jaką częścią pola dużego kwadratu jest pole małego kwadratu?

ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od rysunku.




### Sposób I

Z trójkąta $ABC$ mamy

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{3}b.$$

Szukany stosunek pól kwadratów jest więc równy

$$\frac{AB^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{\frac{b^2}{3}+b^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}b+b\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^2} =$$
$$= \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}+3}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3+6\sqrt{3}+9}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4+2\sqrt{3}}{3}} = \frac{4}{4+2\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4-3} = 4-2\sqrt{3}.$$

## Sposób II

Rachunki będą odrobinę prostsze jeżeli wyznaczmy $b$ w zależności od $a$.

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}b.$$

Szukany stosunek pól jest równy

$$\begin{aligned} \frac{AB^2}{(a+b)^2} &= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+3b^2}{(\sqrt{3}b+b)^2} = \frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2} = \\ &= \frac{4}{3+2\sqrt{3}+1} = \frac{4}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4-3} = 4-2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

---

Odpowiedź: $4-2\sqrt{3}$

### ZADANIE 33 (4 PKT.)

Grupa osób chce kupić prezent za 72 zł. Składają się po równo. Gdyby w grupie było o 3 osoby mniej to składka byłaby wyższa o 4 zł. Ile osób liczy grupa?

### ROZWIĄZANIE

Powiedzmy, że składa się $n$ osób po $x$ złotych. Mamy zatem układ równań

$$\begin{cases} nx = 72 \\ (n-3)(x+4) = 72. \end{cases}$$

Podstawiamy $x = \frac{72}{n}$ z pierwszego równania do drugiego.

$$\begin{aligned} &(n-3)\left(\frac{72}{n}+4\right) = 72 \quad / \cdot \frac{n}{4} \\ &(n-3)(18+n) = 18n \\ &18n + n^2 - 54 - 3n = 18n \\ &n^2 - 3n - 54 = 0 \\ &\Delta = 9 + 216 = 225 = 15^2 \\ &n = \frac{3-15}{2} = -6 \quad \vee \quad n = \frac{3+15}{2} = 9. \end{aligned}$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy i mamy $n = 9$.

---

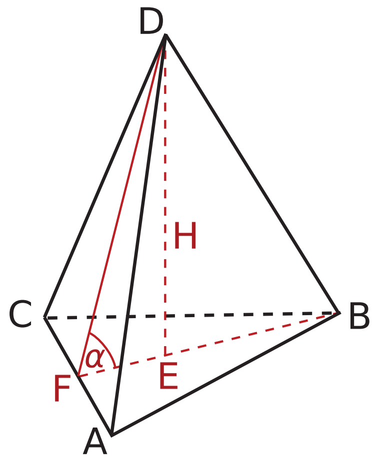
Odpowiedź: **9 osób.**

## ZADANIE 34 (4 PKT.)

Oblicz cosinus kąta między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli wiadomo, że promień okręgu opisanego na podstawie, wysokość ostrosłupa i krawędź boczna tworzą trójkąt równoramienny.

## ROZWIĄZANIE

Rozpoczynamy od rysunku.




Z treści zadania wiemy, że trójkąt $BED$ jest równoramienny, więc jeżeli oznaczymy $DE = H$ to

$$EB = DE = H.$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli odcinek $BF$ w stosunku 2:1, więc

$$EF = \frac{1}{2}EB = \frac{H}{2}.$$

To pozwala obliczyć długość odcinka $DF$ – patrzymy na trójkąt prostokątny $FED$.

$$FD = \sqrt{EF^2 + DE^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4} + H^2} = \sqrt{\frac{5H^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}H}{2}.$$

Mamy zatem

$$\cos\alpha = \frac{EF}{FD} = \frac{\frac{H}{2}}{\frac{\sqrt{5}H}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{5}}{5}$