



Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2010

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Klucz punktowania odpowiedzi

MAJ 2010

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną

I sposób rozwiązania (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 1 \rangle$, $\langle 1, \infty \rangle$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x \in (-\infty, -2)$	$x \in \langle -2, 1 \rangle$	$x \in \langle 1, \infty \rangle$
$-2x - 4 - x + 1 \leq 6$	$2x + 4 - x + 1 \leq 6$	$2x + 4 + x - 1 \leq 6$
$-3x \leq 9$	$x \leq 1$	$3x \leq 3$
$x \geq -3$	W tym przypadku	$x \leq 1$
W tym przypadku	rozwiązaniem nierówności	W tym przypadku
rozwiązaniem nierówności	jest $-2 \leq x < 1$	rozwiązaniem nierówności jest
jest $-3 \leq x < -2$		$x = 1$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3 \leq x \leq 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3, 1 \rangle$.

II sposób rozwiązania (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x+4+x-1 \leq 6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ 2x+4-x+1 \leq 6 \end{cases}$	niemożliwe	$\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \\ -2x-4-x+1 \leq 6 \end{cases}$
$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ 3x \leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$		$\begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ -3x \leq 9 \end{cases}$
$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$	$x \in \langle -2, 1 \rangle$		$\begin{cases} x < -2 \\ x < 1 \\ x \geq -3 \end{cases}$
$x = 1$			$x \in \langle -3, -2 \rangle$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3 \leq x \leq 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3, 1 \rangle$.

Schemat oceniania**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 1 pkt**Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 1 \rangle$, $\langle 1, \infty \rangle$.

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -2)$ $-2x - 4 - x + 1 \leq 6$

II. $x \in \langle -2, 1 \rangle$ $2x + 4 - x + 1 \leq 6$

III. $x \in \langle 1, \infty \rangle$ $2x + 4 + x - 1 \leq 6$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

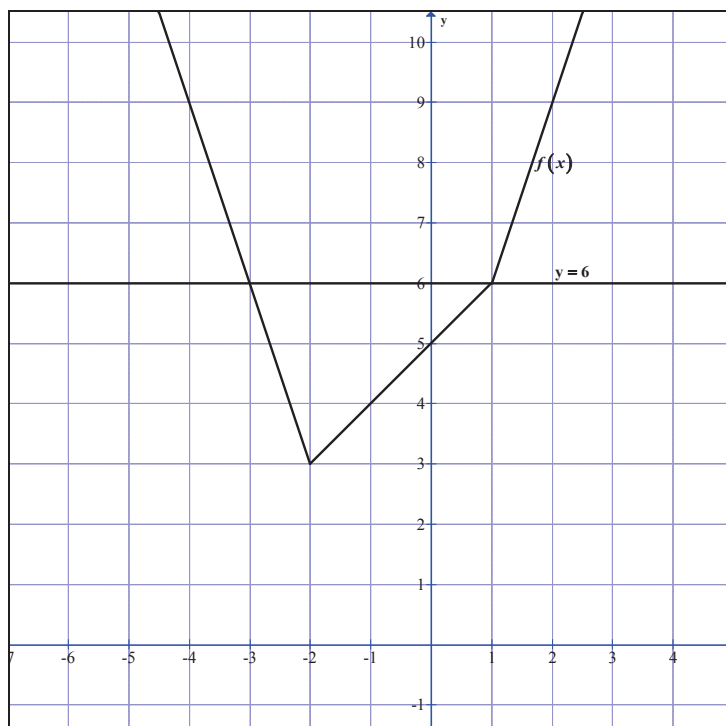
albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że jeden jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

Rozwiązanie pełne 4 pktZdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.**III sposób rozwiązania (graficznie)**Rysujemy wykresy funkcji $f(x) = |2x + 4| + |x - 1|$ i prostą o równaniu $y = 6$.Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 1 \rangle$, $\langle 1, \infty \rangle$.Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 3x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 6$



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresu funkcji f i prostej o równaniu $y = 6$:
 $x = -3$ i $x = 1$.

Podajemy argumenty, dla których $f(x) \leq 6$: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -2)$, $\langle -2, 1 \rangle$, $\langle 1, \infty \rangle$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -2)$ $f(x) = -3x - 3$

II. $x \in \langle -2, 1 \rangle$ $f(x) = x + 5$

III. $x \in \langle 1, \infty \rangle$ $f(x) = 3x + 3$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x + 5 & \text{dla } x \in \langle -2, 1 \rangle \\ 3x + 3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 6$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -3, 1 \rangle$.

Zadanie 2. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x - 4 = 0$$

Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:

$$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0, \quad t = \sin x, \quad \text{gdzie } t \in \langle -1, 1 \rangle. \text{ Równanie przyjmuje teraz postać:}$$

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną t :

$$\Delta = 9 \quad t_1 = -2 \quad t_2 = -\frac{1}{2} \text{ ale } t_1 \notin \langle -1, 1 \rangle$$

Zapisujemy rozwiązania równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ i } x = \frac{7}{6}\pi.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.

$$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0 \text{ lub } 2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \sin x$, zapisanie równania w postaci

$$-2t^2 - 5t - 2 = 0 \text{ lub } 2t^2 + 5t + 2 = 0.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t = -2$ lub $t = -\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t = -2$.

Uwaga

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\sin x$)

i zapisać rozwiązanie w postaci $\sin x = -\frac{1}{2}$ lub $\sin x = -2$ oraz zapisać, że równanie

$\sin x = -2$ jest sprzeczne.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale:

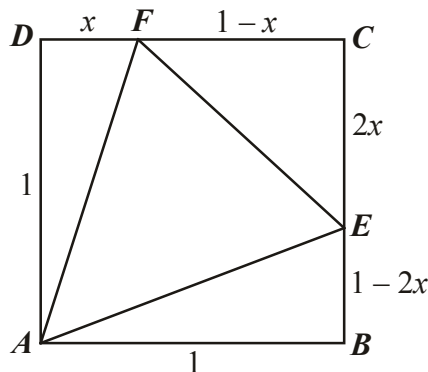
$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi$$

albo

$$x = 210^\circ \text{ lub } x = 330^\circ$$

Zadanie 3. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do badania funkcji kwadratowej

Rozwiązanie

Długości odcinków $|BE|$ i $|CF|$ są następujące: $|BE| = 1 - 2x$, $|CF| = 1 - x$.

Pole trójkąta AEF jest więc równe:

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{FDA} = 1 - \frac{1}{2}(1 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x) - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pole trójkąta AEF jest funkcją zmiennej x : $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ dla $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Ponieważ $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla $x = \frac{1}{4}$ pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.....1 pkt

Zapisanie, że $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$ lub $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zapisanie pól trójkątów ADF , ABE i CEF : $P_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}x$, $P_{\triangle ABE} = \frac{1 - 2x}{2}$

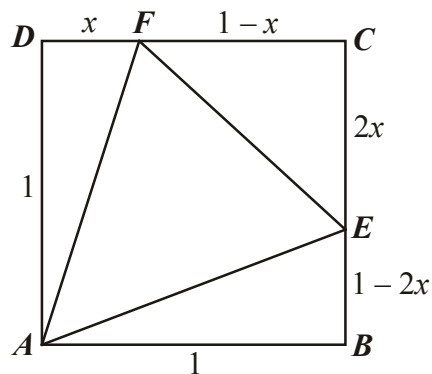
$$\text{i } P_{\triangle CEF} = \frac{-2x^2 + 2x}{2} = -x^2 + x.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej x : $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Wyznaczenie x , dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = \frac{1}{4}$.

II sposób rozwiązania (geometria analityczna)

Przyjmujemy współrzędne punktów na płaszczyźnie: $A = (0, 0)$, $F = (x, 1)$, $E = (1, 1 - 2x)$.

Wyznaczamy pole trójkąta AFE :

$$P = \frac{1}{2} |(x-0)(1-2x-0) - (1-0)(1-0)| = \frac{1}{2} |x(1-2x) - 1| = \frac{1}{2} |x - 2x^2 - 1| = \frac{1}{2} |2x^2 - x + 1|$$

$$P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Ponieważ $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, a parabola o równaniu $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ma ramiona

skierowane „ku górze”, więc dla $x = \frac{1}{4}$ pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktów na płaszczyźnie:

$$A = (0, 0), F = (x, 1), E = (1, 1 - 2x).$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wyznaczenie pola trójkąta AFE :

$$P = \frac{1}{2} |(x-0)(1-2x-0) - (1-0)(1-0)| = \frac{1}{2} |x(1-2x) - 1| = \frac{1}{2} |x - 2x^2 - 1| = \frac{1}{2} |2x^2 - x + 1|$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej x : $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Wyznaczenie x , dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x = \frac{1}{4}$.

Zadanie 4. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianów przez dwumian

Rozwiązanie

Korzystając z warunków zadania zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

Z układu równań obliczamy a i b

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -18 \\ b = -2a - 1 \\ 9a - 6a - 3 = -18 \\ a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla $a = -5$, $b = 9$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania1 pkt

Zapisanie jednego z równań:

$$8 + 4a + 2b + 1 = 7 \quad \text{albo} \quad 27 + 9a + 3b + 1 = 10$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania2pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)3pkt.

Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne4 pkt.

Rozwiązanie układu równań: $a = -5$, $b = 9$.

Zadanie 5. (0–5)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego

I sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego mamy: $2b = a + c$. Stąd i z warunków zadania otrzymujemy, że: $2b = 10$ czyli $b = 5$.

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $(b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19)$.

Zatem otrzymujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} b = 5 \\ a + c = 10 \\ (b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19) \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $a = 10 - c$ lub $c = 10 - a$ i wstawiamy do trzeciego równania.

Otrzymujemy równanie, np. $9^2 = (10 - c + 1)(c + 19)$ lub $9^2 = (a + 1)(10 - a + 19)$.

Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą c lub a , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0.$$

Rozwiązaniem równania są :

$$c_1 = 8, c_2 = -16 \text{ lub } a_1 = 2, a_2 = 26.$$

Zatem szukanymi liczbami są: $a = 2, b = 5, c = 8$ lub $a = 26, b = 5, c = -16$.

Schemat oceniania do I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $2b = a + c$

albo

- $(b + 4)^2 = (a + 1)(c + 19)$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb a, b, c , np.

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + c = 10 \\ (b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą c lub a , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają

poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie szukanych liczb: $a = 2, b = 5, c = 8$ lub $a = 26, b = 5, c = -16$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez r – różnicę tego ciągu.

Wówczas $b = a + r, c = a + 2r$.

Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania mamy $2a + 2r = 10$, stąd $a + r = 5$

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie, np.

$$(a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19),$$

a następnie zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} a+r=5 \\ (a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a = 5 - r$ i podstawiamy do drugiego równania.

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą r :

$$(5-r+r+4)^2 = (5-r+1)(5-r+2r+19) \text{ lub } r^2 + 18 - 63 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są: $r_1 = 3$ lub $r_2 = -21$.

Następnie obliczamy a, b, c .

Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2, b = 5, c = 8$ lub $a = 26, b = 5, c = -16$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń: a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, r – różnica tego ciągu oraz wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np.

$$2a + 2r = 10 \text{ lub } a + r = 5$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie układu równań, np.

$$\begin{cases} a+r=5 \\ (a+r+4)^2 = (a+1)(a+2r+19) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania z niewiadomą r , np.

$$(5-r+r+4)^2 = (5-r+1)(5-r+2r+19) \text{ lub } r^2 + 18 - 63 = 0.$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań, np. $r < 0$ i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie liczb spełniających warunki zadania: $a = 2, b = 5, c = 8$ lub

$$a = 26, b = 5, c = -16.$$

Zadanie 6. (0–5)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Przeprowadzanie dyskusji trójmianu kwadratowego z parametrem

I sposób rozwiązania (wzory Viète'a)

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$$\Delta = m^2 - 8$$

$$\Delta > 0$$

$$m^2 - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2 \cdot 2 = m^2 - 4$$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$$m^2 - 4 > 2m^2 - 13$$

$$m^2 - 9 < 0, \text{ więc } m \in (-3, 3)$$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \text{ i } m \in (-3, 3), \text{ więc } m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

II sposób rozwiązania (wzory na pierwiastki trójmianu)

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność:

$$\Delta = m^2 - 8$$

$$\Delta > 0 \quad m^2 - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$$

Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego:

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

Obliczamy sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego:

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 &= \left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 = \\
 &= \frac{m^2 - 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} + \frac{m^2 + 2m\sqrt{m^2 - 8} + m^2 - 8}{4} = \\
 &= \frac{2m^2 + 2m^2 - 16}{4} = m^2 - 4
 \end{aligned}$$

Rozwiązujemy drugą nierówność:

$$m^2 - 4 > 2m^2 - 13$$

$$m^2 - 9 < 0$$

$$m \in (-3, 3)$$

Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \text{ i } m \in (-3, 3), \text{ więc } m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$, $m \in (-3, 3)$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).

Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ w postaci równoważnej $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \right)^2 > 2m^2 - 13.$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania.....2 pkt

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $m^2 - 9 < 0$.

Rozwiązanie bezbłędne części b).....3 pkt

Rozwiązanie nierówności: $m \in (-3, 3)$.

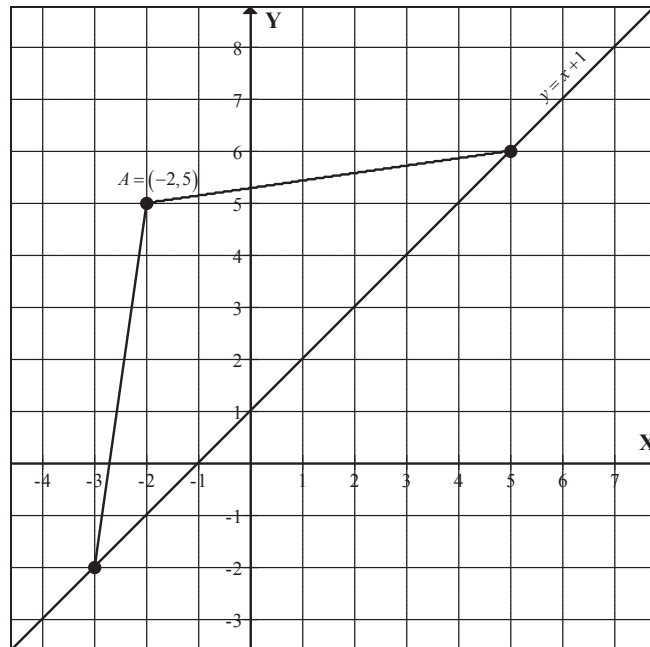
Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i podanie odpowiedzi:

$$m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

Zadanie 7. (0–6)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Stosowanie równań i nierówności do opisu zależności w prostokątnym układzie współrzędnych

Rozwiązanie

Obliczamy odległość punktu A od prostej $y = x + 1$: $d = \frac{|-2 - 5 + 1|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość d jest równa długości wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC . Znamy pole trójkąta ABC , więc obliczamy długość boku BC .

$$P_{ABC} = 15 \text{ stąd } \frac{1}{2}d \cdot |BC| = 15, \text{ więc } |BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Punkt $C = (x, y)$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, zatem $C = (x, x + 1)$. Z warunków zadania mamy $|AC| = |BC|$, więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2} \quad ()^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = 64 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -3$$

Obliczamy rzędne punktów: $y_1 = 6 \quad y_2 = -2$

Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C_1 = (5, 6) \quad C_2 = (-3, -2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt

Obliczenie odległości punktu A od prostej $y = x + 1$: $d = 3\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Obliczenie długości odcinków AC i BC : $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania4 pkt

Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu C (odległość

$|AC| = 5\sqrt{2}$ oraz punkt C należy do prostej o równaniu $y = x + 1$)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 50 \end{cases}$$

i sprowadzenie układu do równania kwadratowego: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)5 pkt

Rozwiązanie pełne6 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (5, 6)$ lub $C = (-3, -2)$.

Zadanie 8. (0–5)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego

Rozwiązanie

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ oraz

na prostej równoległej do osi Ox , np. $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$, $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x \neq 0$.

Zapisujemy pole trójkąta ABC , gdzie $C = (3, -1)$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2} + 1\right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|.$$

Wystarczy wobec tego udowodnić, (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + a \geq 2$. Po pomnożeniu obu stron nierówności przez a

otrzymujemy nierówność równoważną $1 + a^2 \geq 2a$, czyli $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, a więc nierówność $(a - 1)^2 \geq 0$.

Schemat oceniania

Uwaga

Zdający otrzymuje 0 punktów, jeżeli wybierze konkretne dwa punkty A oraz B i dla tych punktów obliczy pole trójkąta ABC .

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania1 pkt

Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ oraz

na prostej równoległej do osi Ox , np. $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$, $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x \neq 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie długości odcinka AB ($|AB| = 2|x|$) oraz wysokości h trójkąta ABC ($h = \frac{1}{x^2} + 1$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left| \frac{1}{x^2} + 1 \right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|$$

Uwaga

Zdający może założyć, że $x > 0$ i zapisać wzór na pole trójkąta w postaci:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{2 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{2} = \frac{1}{x} + x$$

Rozwiązanie pełne 5pkt

Uzasadnienie, że $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$.

Zdający może powołać się na (znane) twierdzenie o sumie liczby dodatniej i jej odwrotności.

Zadanie 9. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego

Rozwiązanie

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, czworokąt $DCFE$ jest kwadratem, więc $|AB| = |CD| = |CF|$. W kwadracie $CBHG$ odcinki BC i CG są równe.

Niech α oznacza kąt ABC danego równoległoboku. Wówczas $|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \alpha$.

W kwadratach $CDEF$ oraz $CBHG$ mamy $|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle DCF| = 90^\circ$, więc

$$|\sphericalangle FCG| = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ - 90^\circ = \alpha = |\sphericalangle ABC|.$$

W trójkątach ABC i FCG mamy zatem: $|AB| = |CF|$, $|BC| = |CG|$ oraz $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$, więc trójkąty ABC i FCG są przystające (cecha bkb). Stąd wnioskujemy, że $|AC| = |FG|$.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zaznaczenie na rysunku odcinków AC i FG oraz zapisanie równości $|AB| = |CF|$ i $|BC| = |CG|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Stwierdzenie, że trójkąty ABC i FCG są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Stwierdzenie, że trójkąty ABC i FCG są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów $|\sphericalangle FCG| = |\sphericalangle ABC|$.

Rozwiązanie pełne4 pktZapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.**Zadanie 10. (0–4)**

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Modelowanie matematyczne	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześćcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma kwadratów trzech liczb będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.

Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.

Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.

$|A|$ możemy obliczać następująco:

I sposób

- ciągi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
 - ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,
- czyli $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$

II sposób

- ciągi stałe – jest ich 6,
 - ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2 \cdot 3 = 6$,
 - ciągi, w których występują dwie liczby ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$,
 - ciągi różnowartościowe o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$,
- czyli $|A| = 6 + 6 + 36 + 24 = 72$,

III sposób

- ciągi, w których występują liczby dające tę sama resztę przy dzieleniu przez 3 – jest ich $3 \cdot 2^3 = 24$,
 - ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
 - ciągi, w których występują dwie liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 2 i jedna liczba dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 – jest ich $3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 24$,
- czyli $|A| = 24 + 24 + 24 = 72$,

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Istotny postęp.....2 pkt

Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A : $|A| = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 11. (0–5)

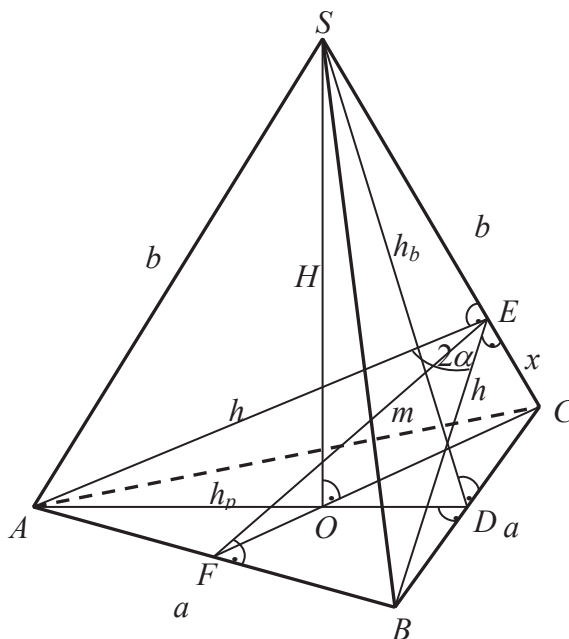
Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Obliczanie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii

Uwaga

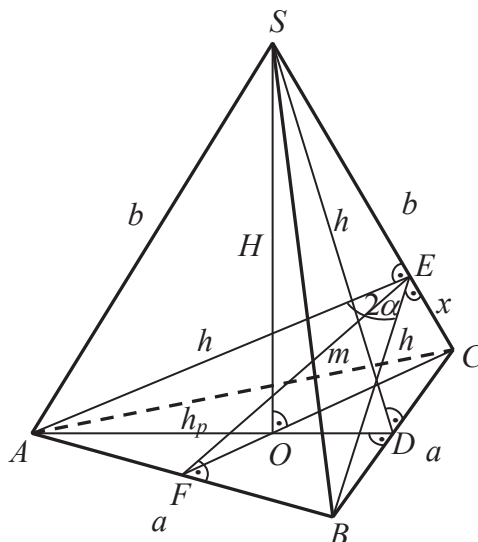
Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. W każdym z nich wyróżniamy następujące etapy rozwiązania

- Poprawna interpretacja bryły i podanego kąta dwuściennego w tej bryle.
- Wyznaczenie m lub h w zależności od a i α .
- Wyznaczenie jednej z wielkości: x , b , h_b (w zależności od a i α), z której można już wyznaczyć H .
- Wyznaczenie H w zależności od a i α .
- Wyznaczenie V w zależności od a i α .

Użyliśmy oznaczeń jak na rysunku



Rozwiązanie (wyznaczenie m , wyznaczenie x , wyznaczenie H z podobieństwa trójkątów OCS i ECF)



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wyznaczamy wysokość FE trójkąta równoramiennego ABE

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka EC z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCE :

$$x = \sqrt{h_p^2 - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{4\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów OCS i ECF mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

$$\text{Stąd } H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a^3 \cos \alpha}{12\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania

zadania 1 pkt

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Uwaga

Nie wymagamy rysunku, jeżeli z dalszych obliczeń wynika, że zdający poprawnie interpretuje treść zadania.

Rozwiązanie, w którym jest istotny 2 pkt

Wyznaczenie wysokości EF trójkąta ABE w zależności od a i α : $m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Wyznaczenie długości odcinka EC : $x = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$.

Rozwiązanie prawie całkowite..... 4 pkt

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3(4\sin^2\alpha - 1)}}$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{1}{12} \frac{a^3 \cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.