ODPOWIEDZI I SCHEMAT ROZWIĄZAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Poprawna odpowiedź	C	B	A	B	B

ZADANIA OTWARTE

Numer zadania	**Model odpowiedzi**
Zadanie 6. (0-2)	• $f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ • $f'(-4) = \frac{4}{9}$ • Zakodowanie odpowiedzi **4 | 4 | 4**
Zadanie 7. (0-2)	• $W(x) = \left(x-\sqrt{3}\right)(x-2)(x+2)$ • Suma : $\sqrt{3}$ • Zakodowanie odpowiedzi **7 | 3 | 2**
Zadanie 8. (0-2)	• $\frac{25}{6}$ • Zakodowanie odpowiedzi **1 | 6 | 6**
Zadanie 9. (0-2)	• $\frac{5}{7}$ • Zakodowanie odpowiedzi **7 | 1 | 4**
Zadanie 10. (0-3)	• $W(1) = 0$ • $W(x) = (x-1)(x^2-x-6) = 0$ • $x \in \{1, -2{,}3\}$

Zadanie 11. (0-3)	• Rozwiązanie układu równań i doprowadzenie do postaci $10x^2 - 4x - 1 = 0$ • Obliczenie $\Delta > 0$ • Wniosek: prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne
Zadanie 12. (0-3)	• Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 4x$ • Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \|x^2 + 4x\| - 3$ • Podanie odpowiedzi $p \in (-\infty, -3\rangle \cup (1, +\infty)$
Zadanie 13. (0-3)	• Zaznaczenie odpowiedniego kąta na rysunku • Zastosowanie twierdzenia cosinusów: $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha$ • Obliczenie wartości $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
Zadanie 14. (0-3)	• Wyznaczenie liczby wszystkich liczb zawierających jedną cyfrę 4, jedną cyfrę 2 i pięć cyfr 1: 42 • Wyznaczenie liczby wszystkich liczb zawierających trzy cyfry 2, cztery 1: 35 • Wyznaczenie liczby wszystkich liczb zawierających jedną cyfrę 8, sześć 1: 7 oraz podanie odpowiedzi: 84
Zadanie 15. (0-4)	• Naszkicowanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń: c – szukana długość h_a, h_b, h_c – długości wysokości opuszczonych odpowiednio na boki a, b, c • Zastosowanie wzoru na pole trójkąta: $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ • Wykorzystanie warunku: $h_c = h_a + h_b$ $\frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$ • Obliczenie c: $c = \frac{ab}{a+b}$

Zadanie 16. (0-5)	• Przekształcenie równania: $a^2x^2 + ax + 1 - 7a^2 = 0$ • jeśli równanie ma dwa pierwiastki, to: $\Delta \geq 0$ oraz $a > 0$ $\Delta = a^2(28a^2 - 3) \geq 0$, stąd $a^2 \geq \frac{3}{28}$ • Aby pierwiastki były liczbami całkowitymi, to na podstawie wzorów Viete'a: $x_1 + x_2 = \frac{-1}{a}$ jest liczbą całkowitą, stąd uwzględniając warunek $a > 0$ wynika, że liczba $a = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in N$ • $a = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in N$ oraz $a^2 \geq \frac{3}{28}$, zatem $n \in \{1,2,3\}$ • Jeśli $n = 1$, to $x \in \{-3,2\}$ Jeśli $n = 2$, to $x \in \{-3,1\}$ Jeśli $n = 3$, to $x \in \{-2,-1\}$ Ostatecznie $a \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$
Zadanie 17. (0-6)	• Oznaczenie $W(x) = x^3 + ax^2 - 6x - 8,\ x_1 = b, x_2 = bq, x_3 = bq^2$ • Z warunków zadania $W(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ • $W(x) = (x-b)(x-bq)(x-bq^2) =$ $x^3 - bq(q^2+q+1)x^2 + b^2q(q^2+q+1)x - b^3q^3$ • $\begin{cases} bq(q^2+q+1) = -a \\ b^2q(q^2+q+1) = -6, \\ b^3q^3 = 8 \end{cases}$ • stąd $\begin{cases} bq = 2 \\ bq = \frac{6}{a}, \end{cases}$ $a = 3$ • Rozwiązanie równania $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$, $(x+1)(x-2)(x+4) = 0$, stąd $x \in \{-1,2,-4\}$

Zadanie 18. (0-7)	• Sporządzenie rysunku i wprowadzenie oznaczeń: A, B, C, D, S - wierzchołki ostrosłupa O - środek kuli H - spodek wysokości ostrosłupa K, L - środki boków AD i BC M - punkt styczności kuli ze ścianą BCS a - długość krawędzi podstawy h - długość wysokości ostrosłupa • Z przekroju osiowego – trójkąta KLS: $\|HL\| = \frac{1}{2}a$, $\|SO\| = h - R$, $\|SL\| = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + h^2}$, $\|OM\| = R$ • Z podobieństwa trójkątów $SOMiSHL$: $\frac{R}{h-R} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}}$, stąd • $a^2 = \frac{4R^2h}{h-2R}$ • Badanie funkcji $V(h) = \frac{1}{3}a^2h = \frac{4R^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2R}$ dla $h \in (2R; \infty)$ • $V'(h) = \frac{4Rh}{3(h-2R)^2} \cdot (h - 4R),\ h \in (2R; \infty)$