Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**D**	**B**	**B**	**C**	**D**	**C**	**C**	**D**	**D**	**A**	**B**	**D**	**B**	**B**	**A**	**C**	**B**	**C**	**A**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. (0-2)
Rozwiąż nierówność $3-x(x+1)\le x^2+4x$.

Rozwiązanie
Nierówność przekształcamy równoważnie

$$3-x^2-x\le x^2+4x,$$
$$2x^2+5x-3\ge 0.$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$, wykorzystując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot(-3)=49,\ \sqrt{\Delta}=7,$$
$$x_1=\frac{-5+7}{2\cdot 2}=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-5-7}{2\cdot 2}=-3.$$

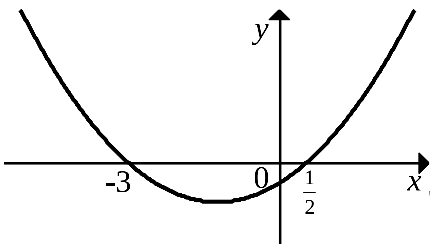
Możemy również obliczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2+5x-3$, rozkładając go na czynniki liniowe

$$2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3=2x(x+3)-(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

Stąd

$$2x-1=0 \text{ lub } x+3=0,$$
$$x=\frac{1}{2} \text{ lub } x=-3.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=2x^2+5x-3$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in\left(-\infty,-3\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right).$$

Odpowiedź: $x\in\left(-\infty,-3\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $(2x-1)(x+3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x+\frac{5}{4}\right| \geq \frac{7}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x+\frac{5}{4}\right| \leq \frac{7}{4}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy:

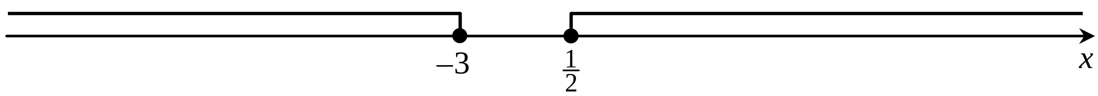
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-3\rangle \cup \langle \frac{1}{2},+\infty)$ lub $x \in (-\infty,-3\rangle \cup \langle \frac{1}{2},+\infty)$ lub ($x \leq -3$ lub $x \geq \frac{1}{2}$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -3$, $x \geq \frac{1}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 22. (0-2)
Rozwiąż równanie $\left(-x^3-4x\right)\left(8x^3+1\right)=0$.

Rozwiązanie
Równanie $\left(-x^3-4x\right)\left(8x^3+1\right)=0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$-x\left(x^2+4\right)\left(8x^3+1\right)=0.$$

Iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy 0. Zatem równanie $\left(-x^3-4x\right)\left(8x^3+1\right)=0$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$-x=0 \text{ lub } x^2+4=0 \text{ lub } 8x^3+1=0,$$

$$x=0 \text{ lub } x^2+4=0 \text{ lub } x^3=-\frac{1}{8}.$$

Równanie $x^2+4=0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, a z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że rozwiązaniem równania $x^3=-\frac{1}{8}$ jest liczba $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

W rezultacie równanie $\left(-x^3-4x\right)\left(8x^3+1\right)=0$ ma dwa rozwiązania: $x=0$, $x=-\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy zapisze równanie w postaci alternatywy

- $-x=0$ lub $x^2+4=0$ lub $8x^3+1=0$,

albo

- $-x^3-4x=0$ lub $8x^3+1=0$ i poda jedno z rozwiązań równania: $x=0$ albo $x=-\frac{1}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy wyznaczy oba rozwiązania równania: $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$.

Zadanie 23. (0-2)
Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x)=-2x^2+8x+c$ jest przedział $\left(-\infty,-21\right\rangle$. Oblicz wartość współczynnika *c*.

Rozwiązanie (I sposób)
Ponieważ zbiorem wartości funkcji kwadratowej *f* jest przedział $\left(-\infty,-21\right\rangle$, więc największa wartość tej funkcji jest równa -21. Ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f* otrzymujemy

$$-\frac{\Delta}{4\cdot(-2)}=-21,$$
$$\Delta=-168,$$
$$8^2-4\cdot(-2)\cdot c=-168,$$
$$64+8c=-168,$$
$$8c=-232,$$
$$c=-29.$$

Rozwiązanie (II sposób)
Zapiszmy wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej

$$f(x)=-2\left(x^2-4x\right)+c=-2\left(x^2-4x+4\right)+c+8=-2(x-2)^2+c+8.$$

Największa wartość funkcji *f* jest więc równa $c+8$, ale zbiorem wartości funkcji kwadratowej *f* jest przedział $\left(-\infty,-21\right\rangle$, więc największa wartość tej funkcji jest równa -21.
Zatem

$$c+8=-21,$$
$$c=-29.$$

Rozwiązanie (III sposób)
Ponieważ zbiorem wartości funkcji kwadratowej *f* jest przedział $\left(-\infty,-21\right\rangle$, więc największa wartość tej funkcji jest równa -21. Funkcja *f* przyjmuje wartość największą dla argumentu równego

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2\cdot(-2)}=2.$$

Zatem

$$f(2)=-21,$$
$$-2\cdot 2^2+8\cdot 2+c=-21,$$
$$-8+16+c=-21,$$
$$c=-29.$$

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy zapisze, że największa wartość funkcji *f* jest równa -21 oraz

- zapisze równość $-\frac{\Delta}{4\cdot(-2)}=-21$,

albo

- wzór funkcji w postaci kanonicznej $f(x)=-2(x-2)^2+c+8$

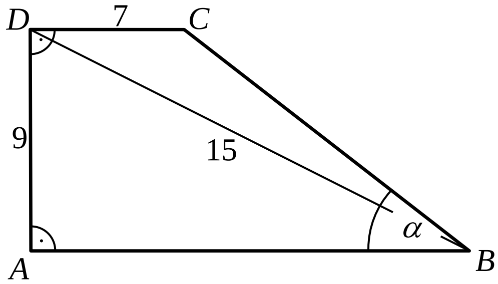
albo

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*: $x_w=2$ oraz zapisze równość $f(x_w)=-21$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

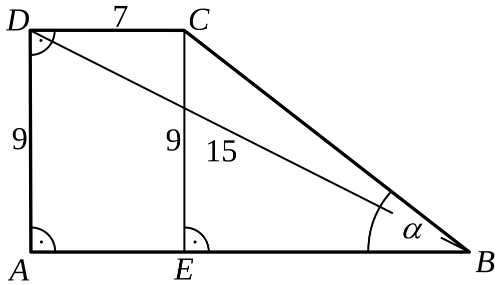
Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy obliczy wartość współczynnika *c*: $c=-29$

Zadanie 24. (0-2)
Ramię *AD* trapezu prostokątnego *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest prostopadłe do podstaw tego trapezu i ma długość równą $|AD|=9$. Przekątna *BD* ma długość $|BD|=15$, a podstawa *CD* ma długość $|CD|=7$ (zobacz rysunek).



Oblicz tangens kąta ostrego α tego trapezu.

Rozwiązanie
Poprowadźmy wysokość *CE* trapezu.



Wówczas czworokąt *AECD* jest prostokątem, więc
$$|AE|=|DC|=7 \text{ oraz } |EC|=|AD|=9.$$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABD* otrzymujemy
$$|AB|^2+|AD|^2=|BD|^2,$$
$$|AB|^2+9^2=15^2,$$
$$|AB|^2=225-81,$$
$$|AB|^2=144.$$

Stąd $|AB| = 12$. Zatem $|EB| = 12 - 7 = 5$. Z trójkąta prostokątnego *BCE* otrzymujemy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{9}{5}.$$

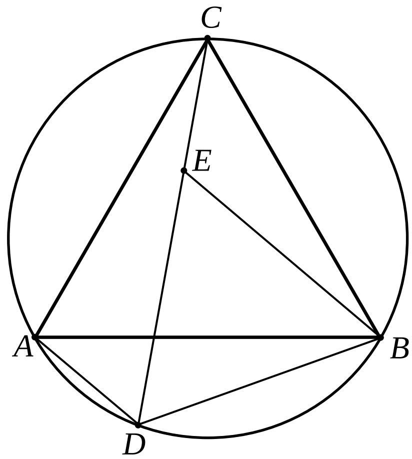
Odpowiedź: Tangens kąta ostrego α tego trapezu jest równy $\frac{9}{5}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy obliczy długość odcinka *EB*: $|EB| = 5$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy obliczy tangens kąta ostrego α tego trapezu: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{9}{5}$.

Zadanie 25. (0-2)
Trójkąt równoboczny *ABC* jest wpisany w okrąg. Punkt *D* leży na krótszym łuku *AB*. Punkt *E* leży na odcinku *CD* oraz $|DE| = |DB|$ (zobacz rysunek).



Udowodnij, że trójkąty *BAD* i *BCE* są przystające.

Dowód
Trójkąt *ABC* jest równoboczny, więc $|AB| = |CB|$ oraz $|\angle ABC| = |\angle BAC| = 60^\circ$.
Kąty *BAC* i *BDC* to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku *BC*, więc

$$|\angle BDC| = |\angle BAC| = 60^\circ.$$

Stąd i z równości $|DE| = |DB|$ wynika, że trójkąt *BDE* jest równoboczny. Zatem

$$|BD| = |BE| \text{ oraz } |\angle DBE| = 60^\circ.$$

Ponieważ $|AB| = |CB|$ i $|BD| = |BE|$, więc żeby wykazać, że trójkąty *BAD* i *BCE* są przystające wystarczy wykazać, że miary kątów *ABD* i *CBE* są równe.
To jest prawdą, gdyż

$$|\angle ABD| = |\angle DBE| - |\angle ABE| = 60^\circ - |\angle ABE|$$

oraz

$$|\angle CBE| = |\angle ABC| - |\angle ABE| = 60^\circ - |\angle ABE|.$$

To kończy dowód.
Uwaga
Gdy wykażemy, że trójkąt *BDE* jest równoboczny, to przystawanie trójkątów *BAD* i *BCE* wynika wprost z faktu, że trójkąt *BAD* jest obrazem trójkąta *BCE* w obrocie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół punktu *B* o kąt 60°.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy wykaże, że trójkąt *BDE* jest równoboczny i tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy udowodni, że trójkąty *BAD* i *BCE* są przystające.

Zadanie 26. (0-2)
Udowodnij, że tylko jedna para liczb rzeczywistych *x*, *y* spełnia równanie

$$3x^2+(x-2)^2+y^2=3.$$

Dowód (I sposób)
Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$3x^2+x^2-4x+4+y^2-3=0,$$

$$4x^2-4x+1+y^2=0,$$

$$(2x-1)^2+y^2=0.$$

Lewa strona tego równania jest sumą dwóch liczb nieujemnych (kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny), więc jest ona równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2x-1)^2=0 \text{ i } y^2=0,$$

a więc gdy $2x-1=0$ i $y=0$, czyli gdy $x=\frac{1}{2}$ i $y=0$.

To dowodzi, że jedynie para $x=\frac{1}{2}$ i $y=0$ spełnia to równanie, co należało udowodnić.

Dowód (II sposób)
Przekształcamy równanie w sposób równoważny:

$$3x^2+x^2-4x+4+y^2-3=0,$$

(1) $$4x^2-4x+1+y^2=0.$$

Potraktujmy to równanie jak zwykłe równanie kwadratowe z jedną niewiadomą *x*. Wyróżnik trójmianu $4x^2-4x+1+y^2$ jest równy

$$\Delta_x=(-4)^2-4\cdot4\cdot(1+y^2)=16-16-16y^2=-16y^2.$$

Zauważmy, że dla każdej liczby $y\neq0$ wyróżnik ten jest ujemny, a więc równanie nie ma wówczas rozwiązań. Jedynie dla $y=0$ wyróżnik ten jest równy 0, więc wtedy równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot4}=-\frac{1}{2}.$$

Zatem istnieje tylko jedna para liczb rzeczywistych: $x=\frac{1}{2}$ i $y=0$ spełniających równanie $3x^2+(x-2)^2+y^2=3$.
To kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 p.,
gdy

- zapisze równanie w postaci równoważnej $(2x-1)^2+y^2=0$

albo

- zapisze równanie w postaci równoważnej $4x^2-4x+1+y^2=0$ i potraktuje go jak równanie kwadratowe z niewiadomą z jedną niewiadomą oraz obliczy wyróżnik $\Delta_x=-16y^2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.,
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 27. (0-4)
Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub suma wszystkich jej cyfr jest równa 5. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, czyli zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to $\Omega=\{100,101,102,\ldots,999\}$. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega|=9\cdot 10\cdot 10=900,$$

a wszystkie zdarzenie jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.
Oznaczamy przez *A* zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub suma wszystkich jej cyfr jest równa 5.
Liczba wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych jest równa

$$9\cdot 10\cdot 5=450,$$

gdyż pierwszą cyfrą takiej liczby może być dowolna cyfra różna od 0, druga cyfra może być dowolna, a trzecia musi być jedną spośród cyfr: 1, 3, 5, 7, 9.
Wyznaczmy teraz te wszystkie liczby naturalne trzycyfrowe, których suma wszystkich cyfr jest równa 5. Taką sumę otrzymamy w jednym z następujących przypadków:
1) pierwszą cyfrą będzie 5, a dwie pozostałe to 0. Jest tylko jedna taka liczba: 500,
2) jedną z cyfr jest 4, jedną 1 i jedną 0. Są cztery takie liczby: 104, 140, 401, 410,
3) jedną cyfrą jest 3, jedną 2 i jedną 0. Tu, podobnie jak w poprzednim przypadku mamy cztery takie liczby: 203, 230, 302, 320,
4) jedną z cyfr jest 3, a dwie pozostałe to 1. Są trzy takie liczby: 113, 131, 311.
5) jedną z cyfr jest 1, a dwie pozostałe to 2. Są, podobnie jak w poprzednim przypadku, trzy takie liczby: 122, 212, 221.
W rezultacie mamy $1+4+4+3+3=15$ liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie wszystkich cyfr równej 5. Spośród nich 6 to liczby nieparzyste: 401, 203, 113, 131, 311, 221. Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* jest równa

$$|A|=450+15-6=459.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest więc równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{459}{900}=\frac{51}{100}.$$

Uwaga
Liczbę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych możemy też obliczyć inaczej. Wystarczy zauważyć, że wśród liczb 1,2,3,4,…98,99,100,101,102,…,999, których jest 999, pierwsze 99 to liczby jedno lub dwucyfrowe. Zatem liczba wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych jest równa $999-99=900$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

albo

- obliczy lub poda liczbę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$

albo

- zapisze co najmniej trzy przypadki, w których suma cyfr liczby naturalnej trzycyfrowej jest równa 5

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczy lub poda liczbę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych nieparzystych: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zapisze wszystkie przypadki, w których suma cyfr liczby naturalnej trzycyfrowej jest równa 5: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, suma cyfr liczby trzycyfrowej jest równa 5, gdy w zapisie tej liczby występuje jedna cyfra 5 i dwie cyfry 0 lub jedna cyfra 4, jedna cyfra 1 i jedna cyfra 0, lub jedna cyfra 3, jedna cyfra 2i jedna cyfra 0, lub jedna cyfra 3 i dwie cyfry 1, lub jedna cyfra 1 i dwie cyfry 2

albo

- obliczy liczbę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie wszystkich cyfr równej 5 lub wypisze wszystkie te liczby:15

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, $|A| = 450 + 15 - 6 = 459$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

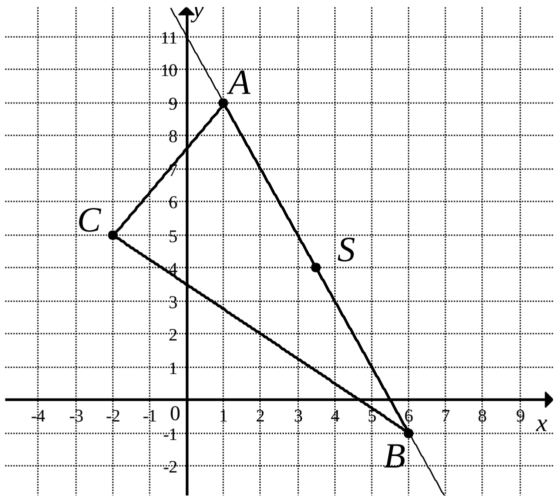
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A* i wynik zapisze w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{51}{100}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający błędnie zapisze, że $|A| = 450 + 15 = 465$, nie zauważając w ten sposób dwukrotnie zlicza liczby nieparzyste o sumie wszystkich cyfr równej 5 i w efekcie obliczy $P(A) = \frac{465}{900} = \frac{31}{60}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający wypisując liczby trzycyfrowe pominie jedną z nich lub dwukrotnie ją wypisze i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeśli zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*, ale nie zapisze go w postaci ułamka nieskracalnego, np. zapisze $P(A) = \frac{450}{900}$, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 28. (0-4)
Punkty $A=(1,9)$ i $C=(-2,5)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego *ABC*, którego przeciwprostokątna *AB* zawiera się w prostej o równaniu $y=-2x+11$. Oblicz współrzędne środka tej przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie (I sposób)
Zauważmy najpierw, że punkt *A* leży na prostej o równaniu $y=-2x+11$, gdyż $-2\cdot 1+11=9$.



Obliczmy współczynnik kierunkowy prostej *AC*

$$a_{AC}=\frac{9-5}{1-(-2)}=\frac{4}{3}.$$

Boki *AC* i *BC* trójkąta *ABC* to przyprostokątne tego trójkąta, więc prosta *BC* jest prostopadła do prostej *AC*. Zatem współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej *AB* jest równy

$$a_{BC}=-\frac{1}{a_{AC}}=-\frac{3}{4}.$$

Prosta *BC* przechodzi przez punkt $C=(-2,5)$, więc jej równanie ma postać

$$y=a_{BC}(x-x_C)+y_C,$$
$$y=-\tfrac{3}{4}(x+2)+5,$$
$$y=-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{7}{2}.$$

Wierzchołek *B* trójkąta *ABC* to punkt przecięcia prostych *AB* i *BC*. Współrzędne tego wierzchołka obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=-2x+11 \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2} \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy

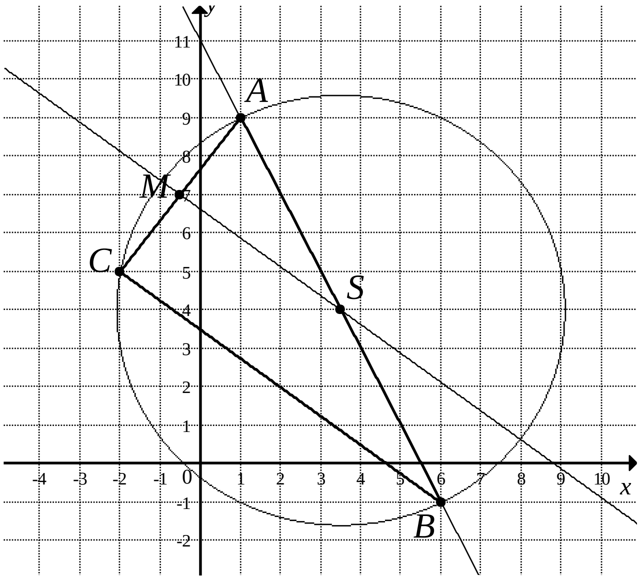
$$-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{7}{2}=-2x+11,$$
$$\tfrac{5}{4}x=\tfrac{15}{2},$$
$$x=6,$$

więc $y=-2\cdot 6+11=-1$. Zatem $B=(6,-1)$.

Współrzędne środka *S* przeciwprostokątnej *AB* obliczymy ze wzorów na współrzędne środka odcinka

$$S=\left(\tfrac{x_A+x_B}{2},\tfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\tfrac{1+6}{2},\tfrac{9+(-1)}{2}\right)=\left(\tfrac{7}{2},4\right).$$

Rozwiązanie (II sposób)
Trójkąt *ABC* jest prostokątny, więc środek *S* przeciwprostokątnej *AB* tego trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, ale środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych boków tego trójkąta.



Wyznaczmy więc równanie symetralnej boku *AC*. Jest to prosta prostopadła do prostej *AC* i przechodzi przez środek *M* boku *AC*.
Obliczmy najpierw współczynnik kierunkowy prostej *AC*

$$a_{AC} = \frac{9-5}{1-(-2)} = \frac{4}{3}.$$

Zatem współczynnik kierunkowy *a* symetralnej boku *AC* jest równy

$$a = -\frac{1}{a_{AC}} = -\frac{3}{4}.$$

Środek *M* boku *AC* ma współrzędne równe

$$M = \left(\tfrac{x_A+x_C}{2}, \tfrac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\tfrac{1+(-2)}{2}, \tfrac{9+5}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, 7\right).$$

Zatem symetralna ma równanie

$$y = a\left(x - x_M\right) + y_M,$$

$$y = -\tfrac{3}{4}\left(x + \tfrac{1}{2}\right) + 7,$$

$$y = -\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{5}{8}.$$

Współrzędne środka *S* przeciwprostokątnej *AB* obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = -\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{5}{8} \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy

$$-\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{5}{8} = -2x + 11,$$

$$\tfrac{5}{4}x = \tfrac{35}{8},$$

$$x = \tfrac{7}{2},$$

więc $y = -2 \cdot \tfrac{7}{2} + 11 = 4$. Zatem $S = \left(\tfrac{7}{2}, 4\right)$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej *AC*: $a_{AC} = \frac{4}{3}$

albo

- obliczy współrzędne środka *M* boku *AC*: $M = \left(-\frac{1}{2}, 7\right)$

albo

- zapisze, że *S* jest punktem przecięcia symetralnej boku *AC* z prostą *AB*

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- wyznaczy równanie prostej *BC*: $y = -\frac{3}{4}(x+2)+5$

albo

- obliczy współrzędne środka *M* boku *AC* i współczynnik kierunkowy symetralnej tego boku: $M = \left(-\frac{1}{2}, 7\right)$, $a = -\frac{3}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka *B*: $B = (6, -1)$

albo

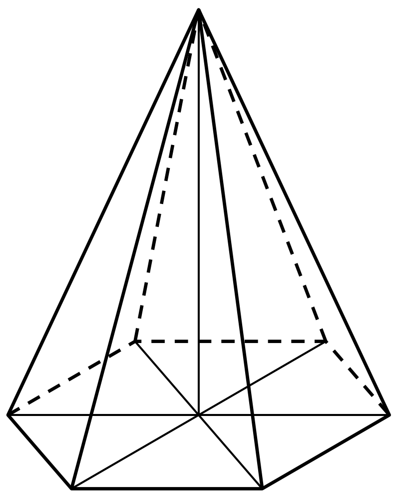
- wyznaczy równanie symetralnej boku *AC* i zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktu *S*: $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{5}{8}$ i $y = -2x + 11$.

  Uwaga
  Zdający nie musi zapisywać formalnie układu równań, o ile z jego rozwiązania wynika, że *S* jest punktem przecięcia prostej *AB* i symetralnej boki *AC*.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy współrzędne środka *S* przeciwprostokątnej *AB* trójkąta *ABC*: $S = \left(\frac{7}{2}, 4\right)$.

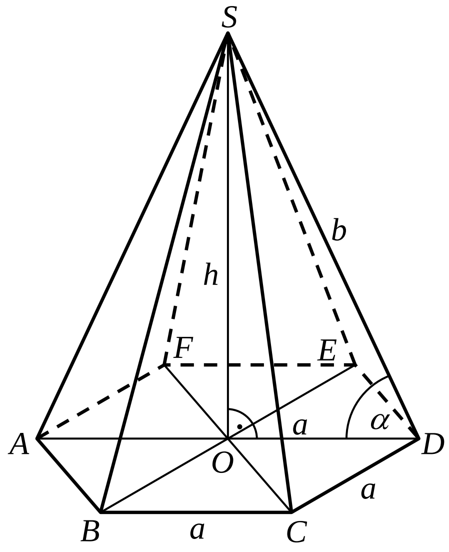
Zadanie 29. ***(5 pkt)***

Suma wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $48\sqrt{2}$. Kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa $6a+6b$, więc otrzymujemy równanie

$$6a+6b=48\sqrt{2},$$

(1) $$a+b=8\sqrt{2}.$$

Podstawą tego ostrosłupa jest sześciokąt foremny o boku długości *a*. Sześciokąt ten składa się z sześciu takich samych trójkątów równobocznych o boku długości *a*. W szczególności $|OD|=a$.

Kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy

$$\cos\alpha=\frac{|OD|}{|DS|}, \text{ czyli } \cos\alpha=\frac{a}{b}.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{1}{3}=\frac{a}{b},$$

$$b=3a.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$a+3a=8\sqrt{2},$$

$$4a=8\sqrt{2}$$

$$a=2\sqrt{2}.$$

Zatem $b=3a=6\sqrt{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ODS* otrzymujemy

$$|DS|^2=|OD|^2+|OS|^2,$$

$$b^2=a^2+h^2$$

$$\left(6\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+h^2,$$

$$72=8+h^2,$$

$$h^2=64,$$

Stąd $h=8$.

Pole podstawy ostrosłupa jest równe sumie sześciu pól trójkątów równobocznych o boku długości $a=2\sqrt{2}$, więc

$$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 8 = 32\sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa $V = 32\sqrt{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze jedno równanie z niewiadomymi *a* i *b*: $6a + 6b = 48\sqrt{2}$, $\frac{1}{3} = \frac{a}{b}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi *a* i *b*: $6a + 6b = 48\sqrt{2}$ i $\frac{1}{3} = \frac{a}{b}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej ostrosłupa:
  $a = 2\sqrt{2}$, $b = 3a = 6\sqrt{2}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy i pole podstawy ostrosłupa: $a = 2\sqrt{2}$, $P_p = 12\sqrt{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa: $h = 8$

albo

- rozwiąże zadanie do końca, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 32\sqrt{3}$.

Zadanie 30. (0-5)

Trzy początkowe wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są równe odpowiednio: 1, $6x$, $4x^2 + 8$. Oblicz *x* oraz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, mniejszych od 150.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem arytmetycznym o różnicy *r*, w którym $a_1 = 1$, $a_2 = 6x$ oraz $a_3 = 4x^2 + 8$.

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$6x = \frac{1 + 4x^2 + 8}{2},$$

$$12x = 4x^2 + 9,$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0,$$

$$\left(2x - 3\right)^2 = 0,$$

$$2x-3=0,$$
$$x=\frac{3}{2}.$$

Gdy $x=\frac{3}{2}$, to $a_2=6x=6\cdot\frac{3}{2}=9$, więc $r=a_2-a_1=9-1=8$. Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu ma postać

$$a_n=a_1+(n-1)r=1+(n-1)8=8n-7 \text{ dla } n\geq 1.$$

Wyznaczmy te wyrazy ciągu (a_n), które są mniejsze od 150.

$$a_n<150,$$
$$8n-7<150,$$
$$n<\frac{157}{8}=19\frac{5}{8}.$$

Są to więc wyrazy a_1, a_2, a_3, …, a_{19}. Suma wszystkich tych wyrazów jest więc równa

$$S_{19}=\frac{a_1+a_{19}}{2}\cdot 19=\frac{1+8\cdot 19-7}{2}\cdot 19=1387.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równanie z niewiadomą x: np.: $6x=\frac{1+4x^2+8}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy x: $x=\frac{3}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy różnicę ciągu (a_n) oraz zapisze warunek pozwalający wyznaczyć liczbę wszystkich wyrazów tego ciągu mniejszych od 150, np.: $r=8$, $8n-7<150$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

Zdający

- wyznaczy liczbę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od 150: 19.

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 p.

Zdający obliczy x oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od 150:

$x=\frac{3}{2}$, $S_{19}=1387$.