PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Odpowiedzi do zadań zamkniętych:

1	2	3	4	5
C	A	B	B	D

Zadania z kodowaną odpowiedzią:

Zadanie 6

P(A) = $\frac{105}{264}$ ≈0, 39772

3	9	7

Zadanie 7

$log_{ab}\, x = \frac{12}{7} \approx 1,71428$

7	1	4

Zadanie 8

Prosta PQ ma równanie 2x + y + 2 = 0

2	1	2

Zadanie 9

Największa liczba spełniająca nierówność to $2\sqrt{5}$ ≈4,4721

4	4	7

Zadanie 10

Obliczam pochodną funkcji $f'(x) = 6x^2 + 2px + 36$

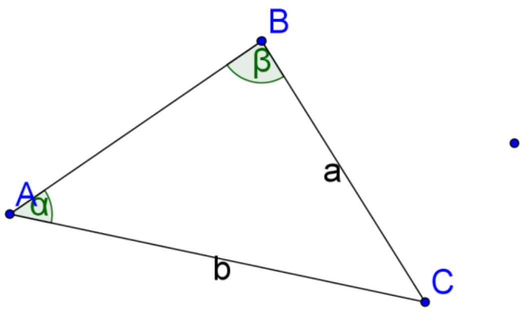
Korzystam z warunku koniecznego istnienia ekstremum w punkcie $f'(2) = 0$, stąd p = - 15.

Badam monotoniczność funkcji f(x): funkcja rosnąca w każdym z przedziałów ($-\infty, 2 >$ i $< 3, \infty)$ oraz malejąca w przedziale $< 2, 3 >$. Zatem w punkcie x = 2 funkcja osiąga maksimum.

Zadanie 11

Korzystam z definicji prawdopodobieństwa warunkowego P(A|B) =$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = $\frac{2}{3}$, zatem P(A ∩ $B) = \frac{2}{3}\, P(B)$. Ponieważ B = (A ∩ B)∪(B – A) i (A ∩ B) ∩ (B – A) = ∅, stąd P(B) = P(A ∩ B) + P(B – A). Podstawiając otrzymujemy P(B – A) = $\frac{1}{3}$ P(B). Zatem $\frac{P\{B-A\}}{P(B)}$ = $\frac{1}{3}$.

Zadanie 12



Z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$ a warunku zadania że $\frac{a}{b} = \frac{cos\alpha}{cos\beta}$ zatem że $\frac{cos\alpha}{cos\beta} = \frac{sin\,\alpha}{sin\beta}$. Po przekształceniu otrzymamy sinα cosβ - cosα sinβ = 0, czyli sin($\alpha - \beta$) = 0, stąd $\alpha = \beta$, trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 13

Rozwiązuję nierówność |x| > 2, stąd x∈ $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Dziedziną nierówności $\frac{7}{x+3} \leq 1$ jest R – { -3 }. Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymuję nierówność $\frac{-x+4}{x+3} \leq 0$, której rozwiązaniem jest x ∈ $(-\infty, -3) \cup < 4, \infty)$.
Wyznaczam część wspólną rozwiązań obu nierówności i ostatecznie otrzymuję
x ∈ $(-\infty, -3) \cup < 4, \infty)$.

Zadanie 14

$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 9^n - 1}{4 \cdot 9^n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{9^n}}{4 + \frac{7}{9^n}} = \frac{5}{4}$, bo $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{9^n} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{7}{9^n} = 0$.

Zadanie 15

Środkiem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0$ jest S(6, 2). Rozwiązuję układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0 \\ x + 7y + 5 = 0 \end{cases}$$

i wyznaczam współrzędne punktów przecięcia okręgu i siecznej K(9, - 2) i L(2, - 1). Obliczam pole P trójkąta równoramiennego KLS, P = 12,5

Zadanie 16

Przekształcam równanie trygonometryczne:

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{5}{8}$

$2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} \cdot 4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{3}{8}$

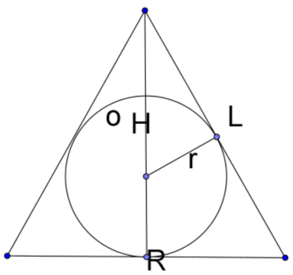
$\sin^2(2x) = \frac{3}{4}$

$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązując te równania dla $x \in <-\frac{\pi}{2}, \pi>$, otrzymujemy następujący zbiór rozwiązań $\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\}$, a ich suma wynosi $\frac{3\pi}{2}$.

Zadanie 17

Rysunek przedstawia przekrój osiowy bryły



Z podobieństwa trójkątów wynika $\frac{r}{H-r} = \frac{R}{L}$, zatem $r = \frac{RH}{R+L}$

Objętość stożka $V_s = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, a objętość kuli $V_k = \frac{4\pi R^3 H^3}{3(R+L)^3}$, stąd $\frac{V_s}{V_k} = \frac{(R+L)^3}{4RH^2}$,

Pole powierzchni stożka $P_s = \pi R(R + L)$, zaś pole powierzchni kuli $P_k = \frac{4\pi R^2 H^2}{(R+L)^2}$, zatem $\frac{P_s}{P_k} = \frac{(R+L)^3}{4RH^2}$

Wynika stąd, że $\frac{V_s}{V_k} = \frac{P_s}{P_k}$.

Zadanie 18

Z treści zadania wynika, że $\frac{a+b}{2} \cdot h = P$, stąd $\frac{a+b}{2} = \frac{P}{h}$ i h > 0’

Trapez ABCD jest równoramienny, zatem |EB| = $\frac{a+b}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczam długość przekątnej BD

$d^2 = (\frac{a+b}{2})^2 + h^2 = (\frac{P}{h})^2 + h^2 = \frac{P^2+h^4}{h^2}$

stąd $d = \sqrt{\frac{P^2+h^4}{h^2}}$ i $d > 0$.

Przekątna trapezu będzie najmniejsza, jeśli funkcja $f(h) = \frac{P^2+h^4}{h^2}$ dla $h > 0$ osiągnie minimum.

$f'(h) = \frac{2h^5 - 2hP^2}{h^4}$

$f'(h) = 0$ dla $h = \sqrt{P}$, $f'(h) < 0$ dla $h \in (0, \sqrt{P})$, $f'(h) > 0$ dla $h \in (\sqrt{P}, 0)$

Funkcja f(h) osiąga minimum dla $h = \sqrt{P}$. Obliczam $d = \sqrt{2P}$.

Najmniejsza długość przekątnej to $\sqrt{2P}$.