

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. A.

Zadanie 2. B.

Zadanie 3. B.

Zadanie 4. B.

Zadanie 5. B.

Zadanie 6.

3	0	0
---	---	---

Zadanie 7.

$$\log_7 50 = \frac{\log_{14} 50}{\log_{14} 7} = \frac{\log_{14}(5^2 \cdot 2)}{\log_{14}\left(\frac{14}{2}\right)} = \frac{\log_{14} 5^2 + \log_{14} 2}{\log_{14} 14 - \log_{14} 2} = \frac{2 \log_{14} 5 + a}{1 - a} = \frac{2b + a}{1 - a} \text{ c. n. d.}$$

Zadanie 8.

Przypuśćmy, że liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

$$\text{Zatem } W(a) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 + a^2 - 8a + 16 = (a^2 - 2a)^2 + (a - 4)^2 = 0.$$

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej a : $(a^2 - 2a)^2 \geq 0$ i $(a - 4)^2 \geq 0$ $W(a) = 0 \Leftrightarrow [(a^2 - 2a)^2 = 0$ i $(a - 4)^2 = 0] \Leftrightarrow [a(a - 2) = 0$ i $a - 4 = 0] \Leftrightarrow [(a = 0$ lub $a = 2)$ i $a = 4]$. Nie istnieje liczba rzeczywista a , która spełniałaby ostatnią koniunkcję. Wielomian ten nie ma pierwiastków.

Zadanie 9.

Zapiszmy równanie stycznej w postaci ogólnej $2x - y + 1 = 0$. Odległość środka okręgu od

stycznej jest równa promieniowi, więc $r = \frac{|2 \cdot (-3) - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$.

Równanie okręgu: $(x + 3)^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 10.

Wykorzystajmy wiadomości dotyczące ciągu arytmetycznego, niech $a_1 = 10$ i $r = 2$.

Obliczmy $S_n = \frac{2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 2}{2} n = n^2 + 9n$. Równanie $n^2 + 9n = 300$ ma dwa rozwiązania

$$n_1 = \frac{-9 - \sqrt{1281}}{2} \text{ oraz } n_2 = \frac{-9 + \sqrt{1281}}{2} \approx 13,4 \text{ nie są to liczby naturalne dodatnie.}$$

$$S_{13} = \frac{20 + 12 \cdot 2}{2} \cdot 13 = 286, \text{ w ciągu 13 dni Ania przeczyta 286 stron}$$

$$300 - 286 = 14.$$

Ania książkę przeczyta w ciągu 14 dni, ostatniego dnia przeczyta 14 stron.

Zadanie 11.

Napiszmy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6, f'(1) = 1$$

zatem szukana styczna ma równanie $y = x - 3$.

Wyznamy punkty wspólne wykresu funkcji i otrzymanej stycznej. W tym celu rozwiążemy

$$x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x - 3$$

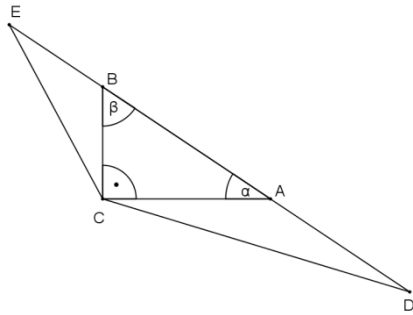
$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$$

$(x - 1)(x^2 + 3x - 4) = 0$ to równanie ma dwa różne rozwiązania $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Zatem styczna w punkcie P ma z wykresem funkcji f jeszcze jeden punkt wspólny

$Q = (-4, -7)$ c. n. d.

Zadanie 12.



Wprowadźmy oznaczenia na rysunku.

$$|\angle CAD| = 180^\circ - \alpha$$

trójkąt ACD jest równoramienny ($|AC| = |AD|$)

$$|\angle ACD| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

analogicznie pokażemy, że $|\angle BCE| = \frac{\beta}{2}$

$$\text{zatem } |\angle ECD| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

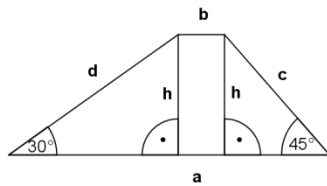
$$|ED| = |EB| + |BA| + |AD| = |BC| + |BA| + |AC| = 20 \text{ cm}$$

niech R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie CDE

z twierdzenia sinusów $2R = \frac{|ED|}{\sin 135^\circ} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, stąd $R = 10\sqrt{2}$ cm, pole koła opisanego na

trójkącie CDE jest równe $200\pi \text{ cm}^2$.

Zadanie 13.



Trapez jest opisany na okręgu o promieniu r , więc $a + b = c + d$

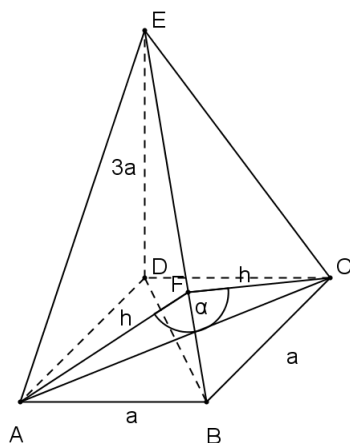
$$\text{i } h = 2r$$

$$\frac{h}{c} = \sin 45^\circ, \text{ stąd } c = h\sqrt{2}$$

$$\frac{h}{d} = \sin 30^\circ, \text{ stąd } d = 2h$$

$$\frac{a+b+c+d}{2r} = \frac{2(c+d)}{h} = \frac{2(2h+h\sqrt{2})}{h} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ c. n. d.}$$

Zadanie 14.



$$|AE| = |EC| = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10} \text{ (} a > 0 \text{)}$$

$$|BE| = \sqrt{(3a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{11}$$

trójkąty ABE i BCE są przystającymi trójkątami prostokątnymi

$$P_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot h$$

$$a \cdot a\sqrt{10} = a\sqrt{11} \cdot h \text{ stąd } h = a\sqrt{\frac{10}{11}}$$

z twierdzenia cosinusów w trójkącie ACF otrzymamy

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 - 2\left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 \cos \alpha,$$

stąd $\cos \alpha = -\frac{1}{10}$.

Zadanie 15.

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Sprawdźmy dla jakich $k \in R$

równanie $\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} = k$ ma rozwiązanie w R .

$x^2 - 3x + 1 = kx^2 + k$, stąd $(k - 1)x^2 + 3x + (k - 1) = 0$

1^o $k = 1$, równanie ma jedno rozwiązanie $x = 0$,

2^o $k \neq 1$, równanie kwadratowe $(k - 1)x^2 + 3x + (k - 1) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, gdy $\Delta \geq 0$

$\Delta = 9 - 4(k - 1)^2 \geq 0$ dla $k \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \rangle \setminus \{1\}$.

Uwzględniając obydwie przypadki wnioskujemy, że zbiorem wartości funkcji f jest $\langle -\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \rangle$

c. n. d.

Zadanie 16.

Wprowadźmy oznaczenia:

A – wśród wylosowanych liczb będzie liczba 5

B – suma wylosowanych liczb będzie parzysta

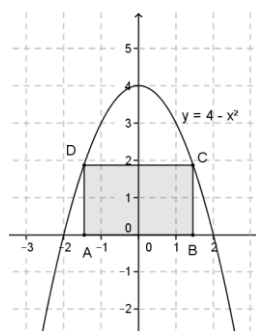
Mamy obliczyć $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z dwóch liczb parzystych lub dwóch liczb nieparzystych, zatem $|B| = \binom{7}{2} + \binom{8}{2} = 49$.

Zdarzeniu A sprzyjają kombinacje złożone z liczby 5 i liczby nieparzystej, $|A \cap B| = 1 \cdot 7 = 7$.

$P(A|B) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

Zadanie 17.



Wprowadźmy oznaczenia na rysunku. Niech $B = (x, 0)$, gdzie $x \in (0, 2)$,

wtedy $A = (-x, 0)$, $C = (x, 4 - x^2)$, $D = (-x, 4 - x^2)$, $|AB| = 2x$,

$|BC| = 4 - x^2$, pole prostokąta $P(x) = 2x \cdot (4 - x^2) = 8x - 2x^3$.

Rozważmy funkcję $f(x) = 8x - 2x^3$, $x \in (0, 2)$.

$f'(x) = 8 - 6x^2$, $x \in (0, 2)$

$f'(x) = 0$ dla $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $f'(x) > 0$ dla $x \in (0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$.

Zatem funkcja f jest ciągła w przedziale $(0, 2)$, jest rosnąca w przedziale

$(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ i malejąca w przedziale $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$, zatem w punkcie $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

przyjmuje wartość największą. $|AB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $|BC| = 4 - (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{8}{3}$ zatem przekątna ma długość

$\sqrt{(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{8}{3})^2} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.