PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2015/2016

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.7. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia.	**D**

Zadanie 2. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.3. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe.	**C**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1.6. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. 5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	**D**

Zadanie 5. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach; 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**C**

Zadanie 6. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.8. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych.	**D**

Zadanie 7. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: 1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	**A**

Zadanie 8. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4.1. Funkcje. Zdający określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego.	**C**

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.6. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie.	**A**

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4.4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$.	**B**

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający: 4) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$; 10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	**A**

Zadanie 12. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	4.13. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. 1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe.	**A**

Zadanie 13. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.1. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. 6.12. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).	**C**

Zadanie 14. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5.2. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. 6. Trygonometria. Zdający: 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną); 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.	**D**

Zadanie 15. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°. 1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**B**

Zadanie 16. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	6.1. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.	**D**

Zadanie 17. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7.1. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. GIMNAZJUM 10.9. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.	**D**

Zadanie 18. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych. 8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.	**B**

Zadanie 19. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9.4. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami.	**A**

Zadanie 20. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	9.3. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów. 6.3. Trygonometria. Zdający oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną). GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli [...]	**B**

Zadanie 21. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	10.2. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.	**C**

Zadanie 22. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych.	**D**

Zadanie 23. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**B**

Zadanie 24. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3.5. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Z warunków zadania $f(x) > g(x)$ otrzymujemy nierówność:

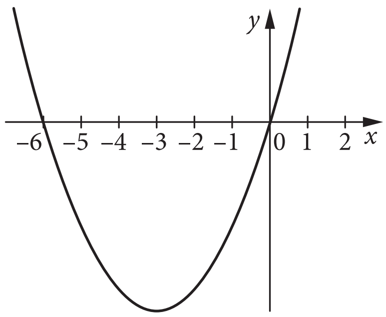
$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 > -x + 2$

$\frac{1}{2}x^2 + 3x > 0$

$x(x+6) > 0$

Miejsca zerowe: $x_1 = 0, x_2 = -6$.

Szkicujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej i na jego podstawie odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.



Odpowiedź: $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$.

II sposób

Zauważmy, że $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4)$, czyli $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$, więc wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(-2,\ 0)$. Wyznaczamy punkt przecięcia się wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x)$.

$\frac{1}{2}(x+2)^2 = -x + 2$

$\frac{x^2}{2} + 2x + 2 = -x + 2$

$\frac{x^2}{2} + 3x = 0$

$x^2 + 6x = 0$

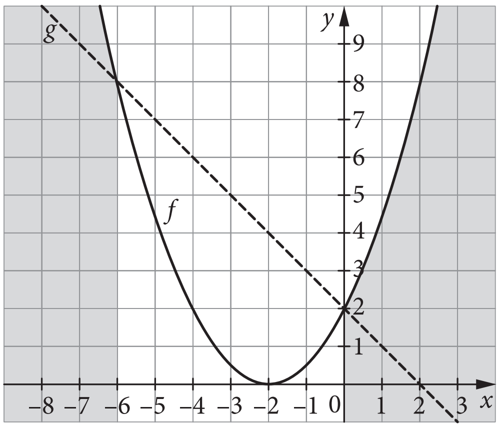
$x(x+6) = 0$

czyli $x_1 = 0$ i $x_2 = -6$

$y_1 = 2$ i $y_2 = 8$

Zatem punkty przecięcia wykresów to $(0, 2)$ i $(-6, 8)$.

Szkicujemy wykresy obu funkcji i z rysunku odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.



Odpowiedź: $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$.

Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

• gdy prawidłowo obliczy pierwiastki $x_1 = 0$, $x_2 = -6$.

albo

• poprawnie narysuje wykresy funkcji f i g.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zapisze zbiór argumentów: $x \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków x_1, x_2 (I sposób) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, to otrzymuje **1 punkt**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np. $(-6, -\infty)$.

Zadanie 25. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	3. Równania i nierówności. Zdający: 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z własności iloczynu, zapisujemy alternatywę

$x = 0$ lub $3x - 6 = 0$ lub $x^3 + 27 = 0$ lub $x + m = 0$.

Stąd $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = -m$.

Równanie będzie miało dokładnie trzy rozwiązania, gdy pierwiastek x_4 będzie równy jednemu z pozostałych. Wynika stąd, że

$-m = 0$ lub $-m = 2$ lub $-m = -3$, czyli $m \in \{-2, 0, 3\}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy poprawnie wyznaczy pierwiastki równania: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = -m$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy poda wartości m: $m \in \{-2, 0, 3\}$.

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	4.15. Funkcje. Zdający posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym. 1.9. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe.

Przykładowe rozwiązanie

Badamy liczebność populacji po upływie kolejnych lat od momentu rozpoczęcia obserwacji:

po upływie roku: $p(1) = 50\,000 \cdot 0{,}7$

po upływie dwóch lat: $p(2) = 50\,000 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 50\,000 \cdot (0{,}7)^2$

po upływie trzech lat: $p(3) = 50\,000 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 0{,}7 = 50\,000 \cdot (0{,}7)^3$

itd.

po upływie t lat: $p(\mathrm{t}) = 50\,000 \cdot (0{,}7)^t$.

Ponadto $p(3) = 50\,000 \cdot (0{,}7)^3 = 17\,150$.

Odpowiedź: Po upływie trzech lat w jeziorze było 17 150 sztuk zagrożonego gatunku ryb.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

• gdy poda właściwy wzór funkcji wyrażającej liczebność populacji po upływie t lat.
albo
• gdy poprawnie obliczy liczbę ryb w jeziorze po upływie trzech lat.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy poda właściwy wzór funkcji wyrażającej liczebność populacji po upływie t lat i poprawnie obliczy liczbę ryb w jeziorze po upływie trzech lat.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. GIMNAZJUM 6. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami; 6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias.

Przykładowe rozwiązania

Zakładamy, że p jest dowolną liczbą pierwszą i $p > 2$. Badamy wyrażenie

$p^2 - (p-2)^2 = p^2 - p^2 + 4p - 4 = 4(p-1)$

Z założenia wynika, że p jest liczbą nieparzystą (jej jedynymi dzielnikami naturalnymi są 1 oraz p, zatem nie jest podzielna przez 2), więc liczba $p - 1$ jest parzysta i można ją zapisać w postaci $2n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Wynika stąd, że

$4(p-1) = 8n \leftarrow$ liczba podzielna przez 8, c.n.d.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy przekształci wyrażenie $p^2 - (p-2)^2$ do postaci $4(p-1)$.

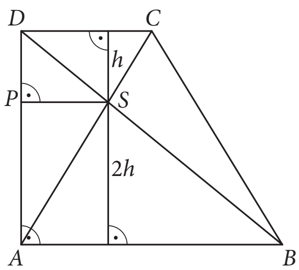
Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy poprawnie uzasadni, że liczba $4(p-1)$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7.3. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Przykładowe rozwiązania



<u>I sposób</u>

Trójkąty ABS i CDS są podobne (z cechy kkk) w skali $k = \frac{|AB|}{|CD|} = 2$, zatem stosunek ich wysokości jest również równy 2. Niech P będzie rzutem punktu S na prostą AD. Zauważmy, że $|PD| = h$, $|AP| = 2h$, czyli $|AD| = 3h$.

Ponadto trójkąty ABD i PSD są podobne (z cechy kkk), więc:

$\frac{|PS|}{|AB|} = \frac{|PD|}{|AD|} = \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$, stąd $|PS| = \frac{1}{3}|AB|$, c.n.d.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zauważy, że trójkąty ABS i CDS są podobne w skali $k = 2$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zauważy, że trójkąty ABD i PSD są podobne w skali $k = \frac{1}{3}$ i wywnioskuje stąd, że $|PS| = \frac{1}{3}|AB|$.

<u>**II sposób**</u>

Trójkąty ABS i CDS są podobne (z cechy kkk) w skali $k = \frac{|AB|}{|CD|} = 2$, zatem stosunek ich wysokości jest również równy 2. Niech P będzie rzutem punktu S na prostą AD. Zauważmy, że $|PD| = h$, $|AP| = 2h$, czyli $|AD| = 3h$.

Ponadto pole trójkąta ABD jest sumą pól trójkątów ABS i ASD, więc:

$\frac{1}{2}|AB| \cdot 3h = \frac{1}{2}|AB| \cdot 2h + \frac{1}{2} \cdot 3h \cdot |PS|$

Stąd $|AB| = 3|PS|$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zauważy, że trójkąty ABS i CDS są podobne w skali $k = 2$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy zauważy, że pole trójkąta ABD jest sumą pól trójkątów ABS i ASD i wywnioskuje stąd, że $|AB| = 3|PS|$.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Przykładowe rozwiązania

<u>**I sposób**</u>

Zauważmy, że prosta AD jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty B i C. Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej BC: $a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Z warunku równoległości $a_{AD} = a_{BC} = \sqrt{3}$.

Punkt $A = (-2\sqrt{3}, 0)$ spełnia równanie prostej AD, więc $0 = \sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) + b$, stąd $b = 6$.

Ostatecznie prosta AD ma równanie $y = \sqrt{3}x + 6$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej BC: $a_{BC} = \sqrt{3}$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy wyznaczy równanie prostej AD: $y = \sqrt{3}x + 6$.

<u>**II sposób**</u>

W sześciokącie foremnym miara kąta DAB jest równa 60°, zatem współczynnik kierunkowy prostej AD wynosi tg $60° = \sqrt{3}$. Równanie prostej przyjmuje zatem postać $y = \sqrt{3}x + b$.

Ponieważ punkt A leży na tej prostej, możemy obliczyć wartość współczynnika b.

$0 = \sqrt{3}(-2\sqrt{3}) + b$

$0 = -6 + b$

$b = 6$

Ostatecznie prosta AD ma równanie $y = \sqrt{3}x + 6$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AD: $a_{AD} = \sqrt{3}$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy wyznaczy równanie prostej AD: $y = \sqrt{3}x + 6$.

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5.4. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zauważmy, że długości boków kolejnych kwadratów tworzą ciąg geometryczny, w którym $a_4 = 8$ i $q = 2$. Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego wynika, że $a_4 = a_1 \cdot q^3$, stąd $a_1 = 1$.

Długość łamanej $L = 3S_{10}$. Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$L = 3S_{10} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3069$.

Odpowiedź: Długość łamanej jest równa 3069.

II sposób

Znamy długość boku czwartego kwadratu $a_4 = 8$ i wiemy, że każdy następny kwadrat ma długość boku dwa razy większą niż poprzedni, więc potrafimy obliczyć długości boków wszystkich dziesięciu kwadratów:

$a_3 = 4$, $a_2 = 2$, $a_1 = 1$, $a_5 = 16$, $a_6 = 32$, $a_7 = 64$, $a_8 = 128$, $a_9 = 256$, $a_{10} = 512$.

Długość łamanej to suma długości trzech boków każdego kwadratu:

$L = 3(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512) = 3069$.

Odpowiedź: Długość łamanej jest równa 3069.

Schemat oceniania obu sposobów

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy obliczy długość boku pierwszego kwadratu: $a_1 = 1$.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy długość łamanej: $L = 3069$.

Zadanie 31. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10.3. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u> (model klasyczny)

Z reguły mnożenia obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Niech A oznacza zdarzenie polegające na utworzeniu liczby trzycyfrowej podzielnej przez 3. Liczba jest podzielna przez 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Ponadto cyfry w otrzymanej liczbie muszą być różne (losowanie bez zwracania), zdarzeniu A sprzyjają zatem wyniki uzyskane z następujących trójek cyfr: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$. Z każdej trójki cyfr liczbę trzycyfrową można utworzyć na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów, więc z reguły mnożenia obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 4 \cdot 6 = 24$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

albo

- zauważy, że liczby sprzyjające zdarzeniu A muszą się składać z następujących trójek cyfr: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający
- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zauważy, że liczby sprzyjające zdarzeniu A muszą się składać z następujących trójek cyfr: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{3, 6, 9\}$.

albo

- wypisze wyniki sprzyjające zdarzeniu A.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A:

$|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3$ (lub $|\Omega| = 60$), $|A| = 4 \cdot 6$ (lub $|A| = 24$).

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

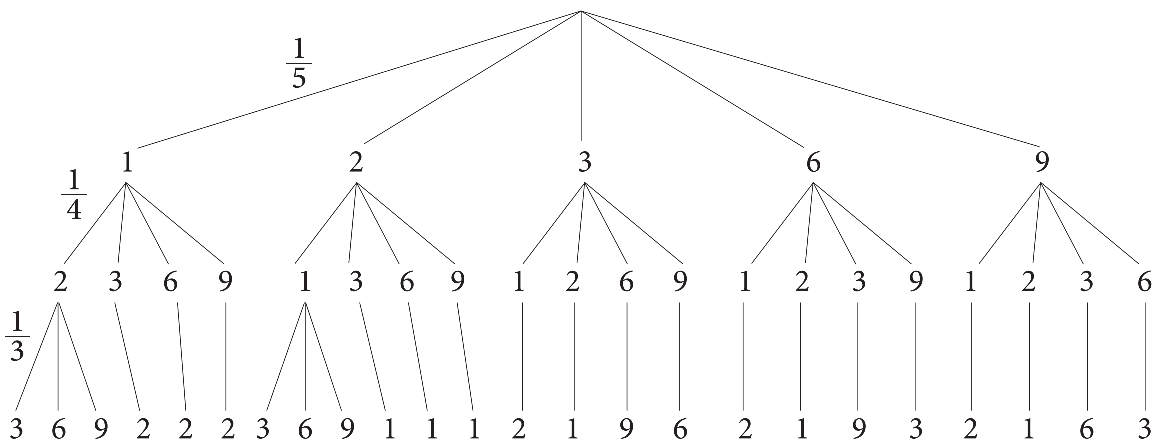
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego lub dziesiętnego: $P(A) = \frac{2}{5}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika jasno, że zdający rozróżnia pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych oraz zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A (np. pojawi się jedynie zapis $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ **albo** $4 \cdot 6 = 24$ bez żadnego opisu czy powszechnie używanej symboliki), to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób (metoda drzewa)

Losowanie z koszyka kolejno bez zwracania trzech ponumerowanych kul możemy zilustrować za pomocą drzewa. Na rysunku uwzględniamy jedynie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A:
$P(A) = 24 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**

Zdający narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zdający poprawnie zaznaczy prawdopodobieństwo przynajmniej na jednym odcinku gałęzi odpowiadającej zdarzeniu A.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zdający poprawnie zaznaczy prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach przynajmniej jednej gałęzi sprzyjającej zdarzeniu A.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**

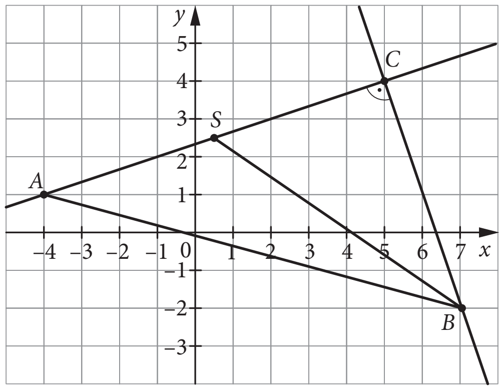
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i poda wynik w postaci ułamka nieskracalnego lub dziesiętnego: $P(A) = \frac{2}{5}$.

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Ustalamy (np. przez podstawienie współrzędnych punktu A), że prosta $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ zawiera przyprostokątną AC tego trójkąta. Prosta BC jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt $B=(7,\ -2)$, więc jej równanie ma postać: $y=-3x+b$, zatem $-2=(-3)\cdot 7+b$, stąd $b=19$. Ostatecznie prosta BC: $y=-3x+19$.

Współrzędne punktu C obliczamy, rozwiązując układ zbudowany z równań prostych AC oraz BC:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \\ y=-3x+19 \end{cases}$$

Po zastosowaniu metody podstawiania otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}=-3x+19$$
$$\frac{10}{3}x=\frac{50}{3}$$
$$x=5$$

Podstawiamy wyznaczony x np. do pierwszego równania układu:

$$y=\frac{1}{3}\cdot 5+\frac{7}{3}=4$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$, stąd wierzchołek $C=(5,4)$.

Korzystając ze wzoru na środek odcinka, wyznaczamy współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AC: $S=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Ze wzoru na długość odcinka obliczamy długość środkowej BS:

$$|BS|=\sqrt{\left(7-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

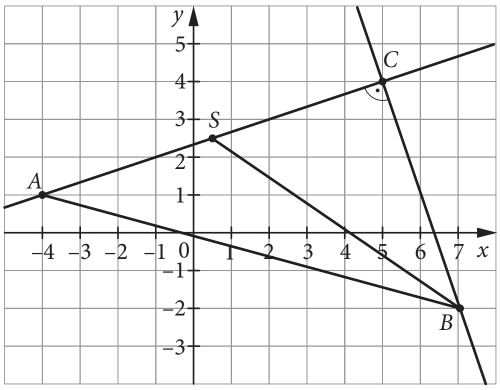
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**
Zdający wyznaczy równanie prostej BC: $y = -3x + 19$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka $C = (5, 4)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zdający wyznaczy współrzędne punktu $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ – środka odcinka AC.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**
Zdający obliczy długość środkowej BS: $|BS| = \frac{5\sqrt{10}}{2}$.

<u>**II sposób**</u>



Ustalamy (np. przez podstawienie współrzędnych punktu A), że prosta $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ zawiera przyprostokątną AC tego trójkąta. Równanie ogólne tej prostej to: $x - 3y + 7 = 0$.

Obliczamy długość boku BC, korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$|BC| = d(B, AC) = \frac{|7 + 6 + 7|}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}.$$

Następnie wyznaczamy długość przeciwprostokątnej AB ze wzoru na długość odcinka: $|AB| = \sqrt{130}$ oraz długość boku AC z twierdzenia Pitagorasa: $|AC| = 3\sqrt{10}$. Z definicji środkowej $|CS| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, więc z twierdzenia Pitagorasa $|BS| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**
Zdający
- obliczy długość boku BC: $|BC| = 2\sqrt{10}$.

albo

- wyznaczy długość przeciwprostokątnej AB: $|AB| = \sqrt{130}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zdający obliczy długość boku BC: $|BC| = 2\sqrt{10}$ i długość przeciwprostokątnej AB: $|AB| = \sqrt{130}$.

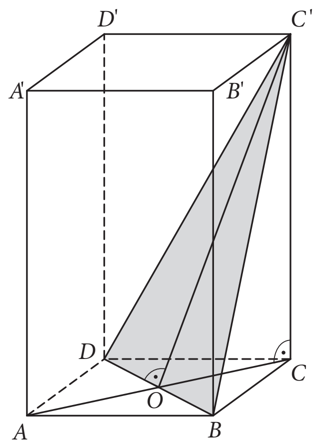
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zdający obliczy długość odcinka CS: $|CS| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**
Zdający obliczy długość środkowej BS: $|BS| = \frac{5\sqrt{10}}{2}$.

Zadanie 33. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9.5. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną. GIMNAZJUM 11.2. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Przykładowe rozwiązanie



W przekroju otrzymujemy trójkąt DBC', w którym wysokość OC' jest o 4 dłuższa od przekątnej BD. Przyjmijmy oznaczenie: $|BD| = d$, $d > 0$. Z informacji o polu przekroju zapisujemy równanie:

$\frac{1}{2}d(d+4) = 48$

$d^2 + 4d - 96 = 0$. Stąd $d_1 = -12$, $d_2 = 8$.

Ponieważ długość odcinka jest dodatnia, więc $|BD| = 8$, czyli $|OC'| = 12$, $|OC| = 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OCC' obliczamy $|CC'|$ – wysokość graniastosłupa:

$|CC'| = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$.

Pole podstawy graniastosłupa: $P_p = \frac{1}{2}d^2 = 32$.

Objętość graniastosłupa: $V = 32 \cdot 8\sqrt{2} = 256\sqrt{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 pkt**
Zdający zaznaczy w graniastosłupie przekrój DBC'.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**
Zdający zinterpretuje przekrój jako trójkąt o wysokości OC' i podstawie BD oraz zapisze równanie $\frac{1}{2}d(d+4) = 48$ wynikające ze wzoru na pole trójkąta.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zdający wyznaczy rozwiązania $d_1 = -12, d_2 = 8$ i odrzuci pierwiastek d_1.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania .... **4 pkt**
Zdający obliczy wysokość graniastosłupa: $|CC'| = 8\sqrt{2}$ i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Zdający poprawnie wyznaczy objętość graniastosłupa: $V = 256\sqrt{2}$.

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający błędnie zaznaczy przekrój graniastosłupa lub nie zaznaczy go wcale, ale poprawnie obliczy jego objętość, to otrzymuje **4 punkty.**