Zad 1

1) $x \leq -3$

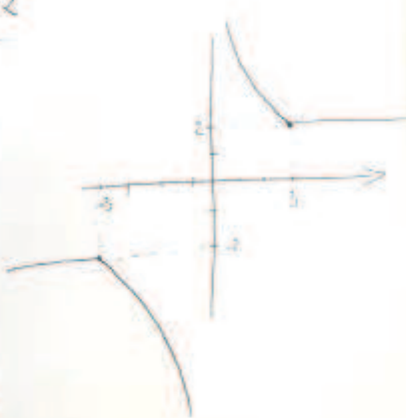
$$f(x) = \frac{-(x+3)-(x-3)}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$$

2) $\cancel{x}$ $-3 < x \leq 3$, $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{(x+3)-(x-3)}{x} = \frac{6}{x}$$

3) $3 < x$

$$f(x) = \frac{(x+3)+(x-3)}{x} = \frac{2x}{x} = 2$$



Zbiór wartości $f(R) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

Zad 2

Odległość punktu $(x_1, 0)$ od prostej $x+y+1=0$

$$d_1 = \frac{|x_1 + 0 + 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|x_1+1|}{\sqrt{2}}$$

Podobnie d_2 $(x_2, 0)$

$$d_2 = \frac{|x_2+1|}{\sqrt{2}}$$

Suma kwadratów odległości ma być 6

$$d_1^2 + d_2^2 = 6$$

$$\left(\frac{|x_1+1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x_2+1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6 \quad / \cdot 2$$

$$(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 = 12 \qquad (*)$$

$$f(x) = x^2 - (2m+2)x + (2m+5)$$

$$\Delta = (-(2m+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+5) = 4m^2 + 8m + 4 - 8m - 20$$
$$= 4m^2 - 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2m+2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = m+1 \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Wstawiamy do $(*)$

$$\left(m+1+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}+1\right)^2 + \left(m+1-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}+1\right)^2 = 12$$

$$(m+2)^2 + 2(m+2)\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 + (m+2)^2 - 2(m+2)\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 = 12$$

$$2(m+2)^2 + 2\frac{\Delta}{4} - 12 = 0$$

3.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + \pi$$

$$\sin \alpha = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \alpha = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\alpha + x) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha + x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor \alpha + x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{3} + \pi + x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor -\frac{\pi}{3} + \pi + x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \lor x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

w $[0, 2\pi]$

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{2} \lor x = \frac{\pi}{6}}$$

Zad 5

Zauważmy że boki trójkąta ABC to $3x$, $4x$, $5x$

Ponieważ $(3x)^2+(4x)^2=(5x)^2$ jest to trójkąt prostokątny

~~Ponieważ szukamy pola tego stosunku~~ ~~$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}$~~ ~~możemy założyć~~

~~przeskalować~~

Włóżmy trójkąt w układ współrzędnych w skali $1:x$

$P_{ABC}=\frac{1}{2}|AC||AB|=\frac{1}{2}4x\cdot 3x=6x^2$

Oznaczmy L_x, L_y rzuty L

na osie OX, OY

Z tw. Talesa: [illegible]

$\frac{|CL_x|}{|CA|}=\frac{|CL|}{|CB|}$

$|CL_x|=\frac{3x}{5x}\cdot 4x=\frac{12}{5}x$

$|AL_x|=|AC|-|CL_x|=4x-\frac{12}{5}x=\frac{8}{5}x$

Analogicznie:

$\frac{|BL_y|}{|BA|}=\frac{|BL|}{|BC|}$

$|BL_y|=\frac{2x}{5x}\cdot 3x=\frac{6}{5}x$

$|AL_y|=|AB|-|BL_y|=3x-\frac{6}{5}x=\frac{9}{5}x$

$P_{KLM}=P_{ABC}-P_{AMK}-P_{BKL}-P_{MLC}=6x^2-\frac{1}{2}|AK||AM|-\frac{1}{2}|BK||AL_x|-\frac{1}{2}|MC||AL_y|$

$=6x^2-\frac{1}{2}\left(x\cdot x+2x\cdot\frac{8}{5}x+3x\cdot\frac{9}{5}x\right)=$

$=x^2\left(6-\frac{1}{2}\left(1+\frac{16}{5}+\frac{27}{5}\right)\right)=x^2\left(\frac{30}{5}-\frac{5+16+27}{2\cdot 5}\right)=x^2\frac{60-48}{10}$

$=\frac{12}{10}x^2$

$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{12}{10}x^2}{6x^2}=\frac{1}{5}$

$x>0$ $y>0$

6. $4\alpha + 2\alpha + \alpha = \pi$

$$\alpha = \frac{\pi}{7}$$

$\sphericalangle BCA = 4\alpha = \frac{4\pi}{7} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ rozwartokątny

Ponieważ $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle BSC|$, wystarczy pokazać, że $|\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle BSC|$.

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartym na tym samym łuku mamy

$$|\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2\cdot 2\alpha = 4\alpha$$

$$|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle CAB| = 2\cdot\alpha,$$

co kończy dowód.

7. Ogólny wyraz $a_n = a_1 q^{n-1}$, $a_1, q > 0$, $q \neq 1$

(zauważmy, że ciąg stały $q = 1$ nie spełnia warunków zadania)

Suma nieparzystych

$a_1 \frac{1-q^{100}}{1-q^2}$

Suma parzystych

$a_1 q \frac{1-q^{100}}{1-q^2}$

$-1) \log q$

$j-1) \Big] \log q =$

$q \Big)$

$\Big(-\frac{99}{2} \log \frac{1}{100} =$

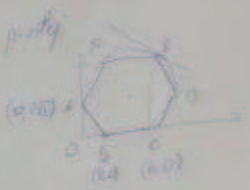
10

logarytm

100, czyli

Zad 8. (1/2)

Styczna w E jest prostopadła do prostej przechodzącej przez D i E



z tw. Pitagorasa

$|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|$

$|AB| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4$

z równości $|AB| = |BC|$ ~~$|CD| = |DE|$~~

$B = (2, 0)$

Więc $C = (6, 0)$

$E = (C_x, 2 \cdot |OA|) = (6, 4\sqrt{3})$

Prosta przechodząca przez D i E to

$(E_x - D_x)(y - D_y) = (E_y - D_y)(x - D_x)$

$(6-2)(y) = (4\sqrt{3} - 0)(x-2)$

$4y = 4\sqrt{3}x - 8\sqrt{3}$ $/:4$

$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$

$Ax + By + C = 0$

$A = \sqrt{3}$

$B = -1$

$C = -2\sqrt{3}$

Zad 8 (2/2)

Prosta prostopadła do $\bar{A}x+\bar{B}y+\bar{C}=0$ wyraża się wzorem ogólnym $\bar{B}x-\bar{A}y+\bar{D}=0$

$-x-\sqrt{3}y+\bar{D}=0$

Ma przechodzić przez punkt $(6, 4\sqrt{3})$

$-6-\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}+\bar{D}=0$

$\bar{D}=6+4\cdot 3=18$

Wzór ostateczny

$-x-\sqrt{3}y+18=0$

9. (1/2)

Niech x oznacza odległość środka wysokości (S) ostrosłupa (w płaszczyźnie ABC) od prostej AB.

Zauważmy (symetria), że środek ten leży na wysokości ABC opuszczonej z C.

Wysokość ostrosłupa wynosi wtedy h, który spełnia równanie:

$h^2+x^2=\cancel{[illegible]}$ 65^2-24^2 $\left(24=\frac{1}{2}|AB|\right)$

Pole podstawy to $\frac{1}{2}\cdot 48\cdot\sqrt{40^2-24^2}=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot 48$

Przestrzeń wokół podstawy x

Ze względu na symetrię mamy $|BS|=|CS|$.

$|BS|=\sqrt{24^2+x^2}$

$|CS|=\sqrt{40^2-24^2}-x$

$\sqrt{24^2+x^2}=32-x$

$x\le 32 \wedge 24^2+x^2=x^2-64x+32^2 \quad /:64$

$x\le 32 \wedge 64x+24^2=32^2$

$x\le 32 \wedge \cancel{4x+9=16\cdot 64}$

$x+9=16$

$x=7$

9. (2/2)

$h^2 + 7^2 = 65^2 - 24^2$

$h^2 = 3600$

$h = 60$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 \cdot 60 = 15360$

(1/2)

10. Zgadujemy pierwiastek $x=-1$ pierwszego czynnika i wydzielamy przez $(x+1)$

$x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1)$

Drugi czynnik nie ma zer, bo $\Delta = 1-4=-3<0$

Potrzebujemy więc m pewne, żeby Δ drugiego równania była >0 oraz żeby $x=-1$ nie było pierwiastkiem drugiego równania (czynnika).

$\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 - 4m = 1 > 0$ zawsze

$1 + (2m+1) + m^2 + m \neq 0$

$m^2 + 3m + 2 \neq 0$ $\quad \Delta = 4-8 \Rightarrow$ wszystkie m ok

Oznaczmy teraz pierwiastki drugiego czynnika x_1 i x_2. Mamy 3 przypadki

I: $\frac{x_1+x_2}{2} = -1$ $\quad \vee \quad \frac{x_1-1}{2} = x_2 \quad \vee \quad \frac{x_2-1}{2} = x_1$

I (wzory Viete'a): $\frac{2m+1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

10. (2/2)

II, III: $0 = (x_1 - 1 - 2x_2)(x_2 - 1 - 2x_1) =$

$= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - x_1 - x_2 + 1$

$= -2(x_1+x_2)^2 + 9x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1$

ze wzorów Viete'a:

$x_1 + x_2 = 2m+1$

$x_1 x_2 = m^2 + m$

$0 = -2(2m+1)^2 + 9(m^2+m) + (2m+1) + 1 =$

$= -8m^2 - 8m - 2 + 9m^2 + 9m + 2m + 2 =$

$= m^2 + 3m = m(m+3)$

$\boxed{m = 0 \quad \vee \quad m = -3}$

11.

Zauważmy, że jedynym sposobem, żeby nastąpiło zdarzenie opisane w zadaniu jest taki, żeby największa z wylosowanych kul (z największym numerem) miała numer równy sumie dwóch pozostałych.

Jeśli kula z największym numerem ma numer parzysty k, to jest $\frac{k-2}{2}$ wykluczających się możliwości wybrania pozostałych kul $\{1, k-1\}$, $\{2, k-2\}$, $\ldots$, $\left\{\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}\right\}$.

Analogicznie w przypadku nieparzystym mamy $\frac{k-1}{2}$ możliwości.

Wszystkich sposobów wyboru jest $\binom{10}{3}$. Ostatecznie wynik

$$P = \frac{\frac{1-1}{2} + \frac{2-2}{2} + \frac{3-1}{2} + \frac{4-2}{2} + \frac{5-1}{2} + \frac{6-2}{2} + \frac{7-1}{2} + \frac{8-2}{2} + \frac{9-1}{2} + \frac{10-2}{2}}{10 \cdot 9 \cdot 8 / 6} = \frac{6}{10 \cdot 9 \cdot 8}(0+2+4+6+8) = \frac{20 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \boxed{\frac{1}{6}}$$