SCHEMAT PUNKTOWANIA ZADAŃ
ARKUSZ II – POZIOM ROZSZERZONY

Nr zadania	Etapy rozwiązania zadania	Maksymalna liczba punktów za dany etap
11. (4 pkt)	1. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $W(3,4)$.	**1p.**
	2. Obliczenie wartości $f(0) = -5$.	**1p.**
	3. Obliczenie wartości $f(7) = -12$.	**1p.**
	4. Zapisanie odpowiedzi: Funkcja f w przedziale $\langle 0;7 \rangle$ osiąga największą wartość równą 4, zaś najmniejszą równą (-12).	**1p.**
12. (4 pkt)	5. Przekształcenie danego równania do postaci np. równania: $x(a-1)(a+1) = a+1$	**1p.**
	6. Zapisanie, że dla $a = 1$ dane równanie nie ma żadnego rozwiązania.	**1p.**
	7. Zapisanie, że dla $a = -1$ dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.	**1p.**
	8. Zapisanie, że dla $a \neq 1$ i $a \neq -1$ dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.	**1p.**
13. (4 pkt)	9. Zapisanie, że warunkiem koniecznym ciągłości danej funkcji w punkcie $x = 2$ jest istnienie skończonej granicy w tym punkcie. Uzasadnienie, że dwumian $(x-2)$ jest podzielnikiem dwumianu $(x^2 + a)$, zatem parametr a przyjmuje wartość: $a = -4$. (1punkt przyznajemy za podanie odpowiedzi $a = -4$ bez uzasadnienia)	**2p.**
	10. Obliczenie granicy danej funkcji w punkcie $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.	**1p.**
	11. Porównanie obliczonej granicy z wartością funkcji g w punkcie $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2) = b$ oraz zapisanie odpowiedzi: Funkcja g jest ciągła w punkcie $x = 2$ gdy $a = -4$ oraz $b = 4$.	**1p.**
14. (5 pkt)	12. Zapisanie, że $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2n + 4$	**2p.**
	13. Obliczenie n - tego wyrazu ciągu: $a_n = 2n + 2$.	**1p.**
	14. Zapisanie różnicy dwóch dowolnych, kolejnych wyrazów tego ciągu: $r = a_{n+1} - a_n$	**1p.**
	15. Obliczenie różnicy ciągu i stwierdzenie, że jest to ciąg arytmetyczny.	**1p.**
15. (5 pkt)	16. Oznaczenie pierwszego wyrazu tego ciągu, np. przez a_1 oraz ilorazu, np. przez q i zapisanie, że $a_1 \cdot q^9 = 10$.	**1p.**
	17. Doprowadzenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{1+2+...+18}$.	**1p.**
	18. Przekształcenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{19 \cdot 9}$.	**1p.**
	19. Przekształcenie iloczynu dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $(a_1 \cdot q^9)^{19}$	**1p.**
	20. Zapisanie odpowiedzi: Iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu jest równy 10^{19}.	**1p.**

16. (4 pkt)	21. Zauważenie i zapisanie, że dane doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu $p=\frac{1}{6}$, prawdopodobieństwo porażki $q=\frac{5}{6}$, liczba prób $N=5$, liczba sukcesów $k\ge 4$.	**1p.**
	22. Zapisanie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k\ge 4)=P_5(k=4)+P_5(k=5)$.	**1p.**
	23. Wykorzystanie wzorów i zapisanie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k\ge 4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0$.	**1p.**
	24. Poprawne obliczenie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia: $P_5(k\ge 4)=\frac{25}{7776}+\frac{1}{7776}=\frac{26}{7776}=\frac{13}{3888}\approx 0{,}00334$.	**1p.**
17. (5 pkt)	25. Zapisanie warunku (1) $\vec{CA}\circ\vec{CB}=0$, gdzie $C(0,y)$.	**1p.**
	26. Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CA}=[-9,\,-2-y]$.	**1p.**
	27. Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CB}=[4,\,2-y]$.	**1p.**
	28. Obliczenie iloczynu skalarnego wektorów $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$: $-36-(2-y)\cdot(2+y)$	**1p.**
	29. Rozwiązanie równania (1) i zapisanie odpowiedzi: Istnieją dwa takie punkty: $C(0,2\sqrt{10})$ lub $C(0,-2\sqrt{10})$.	**1p.**
18. (4 pkt)	30. Sporządzenie rysunku i zaznaczenie na nim szukanego kąta.	**1p.**
	31. Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania np. $a^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2\cdot\frac{3}{4}a^2\cdot\cos\alpha$, gdzie a - długość krawędzi sześcianu, zaś α - miara kąta ostrego między przekątnymi sześcianu	**2p.**
	32. Obliczenie wartości cosinusa kąta ostrego: $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. (Albo: $\cos\beta=-\frac{1}{3}$ gdzie β jest katem rozwartym).	**1p.**
19. (5 pkt)	33. Wykorzystanie faktu istnienia okręgu wpisanego w dany trapez i zapisanie, że suma długości podstaw a i b trapezu jest równa 10 cm.	**2p.**
	34. Zauważenie i zapisanie, że wysokość trapezu, opuszczona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli dłuższą podstawę na odcinki o długościach: $\frac{a+b}{2}$ oraz $\frac{a-b}{2}$.	**1p.**)
	35. Obliczenie długości wysokości trapezu: $h=4\ cm$.	**1p.**
	36. Obliczenie pola danego trapezu: $P=20cm^2$.	**1p.**
20. (10 pkt)	37. Wyznaczenie warunków określających dziedzinę równania $h(x)-\log_2 k=0$: $x>5$ i $k>0$.	**2p.**
	38. Przekształcenie równania $h(x)-\log_2 k=0$ do postaci: $\frac{x^2-4}{x-5}=k$	**1p.**
	39. Przekształcenie równania do postaci: $x^2-kx+5k-4=0$.	**1p.**

	40. Zapisanie układu warunków $\begin{cases}\Delta > 0\\ x_w > 5\\ f(5) > 0\end{cases}$, gdzie x_w oznacza odciętą wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $f = x^2 - kx + 5k - 4$, przy pewnej wartości k.	**1p.**
	41. Obliczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta = k^2 - 20k + 16$.	**1p.**
	42. Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $\Delta > 0 \Leftrightarrow k \in \left(-\infty; 10 - 2\sqrt{21}\right) \cup \left(10 + 2\sqrt{21}; \infty\right)$.	**1p.**
	43. Rozwiązanie nierówności $x_w > 5$: $k \in (10; \infty)$.	**1p.**
	44. Sprawdzenie, że warunek $f(5) > 0$ zachodzi dla każdej rzeczywistej wartości parametru k.	**1p.**
	44. Zapisanie odpowiedzi, uwzględniającej zbiór rozwiązań układu nierówności z p.40 oraz warunku $k > 0$: Dla wszystkich $k \in \left(10 + 2\sqrt{21}; \infty\right)$ równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.	**1p.**
21. **(10 pkt)**	45. Zapisanie zależności między zmiennymi: $\frac{R}{H - R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$.	**1p.**
	46. Wyznaczenie jednej zmiennej z powyższej zależności, np. $r^2 = \frac{16H}{H - 8}$.	**1p.**
	47. Wyznaczenie objętości stożka, jako funkcji jednej zmiennej: $V(H) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16H^2}{H - 8}$.	**1p.**
	48. Wyznaczenie dziedziny funkcji $V(H)$: $D_V = (8; \infty)$.	**1p.**
	49. Obliczenie pochodnej funkcji objętości: $V'(H) = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{H(H - 16)}{(H - 8)^2}$, $D_{V'} = D_V$.	**1p.**
	50. Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji objętości: $H = 16$.	**1p.**
	51. Zbadanie znaku pochodnej funkcji objętości: $V'(H) > 0 \Leftrightarrow H \in (16; \infty)$ oraz $V'(H) < 0 \Leftrightarrow H \in (8; 16)$.	**1p.**
	52. Stwierdzenie i zapisanie, że dla $H = 16$ funkcja V osiąga lokalne minimum równe $V(16) = \frac{512\pi}{3}$.	**1p.**
	53. Uzasadnienie, że minimum lokalne funkcji objętości stożka jest wartością najmniejszą tej funkcji, np. poprzez powołanie się na dwa fakty: $\lim_{H \to 8^+} V(H) = +\infty$ oraz $\lim_{H \to \infty} V(H) = +\infty$.	**1p.**
	54. Podanie wymiarów stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu $R = 4\,cm$: wysokość stożka, $H = 16\,cm$, promień podstawy stożka $r = 4\sqrt{2}\,cm$.	**1p.**

Uwaga:
Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą (zgodną z poleceniem) od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.