Modele odpowiedzi do arkusza Próbnej Matury z OPERONEM

# Matematyka
# Poziom rozszerzony

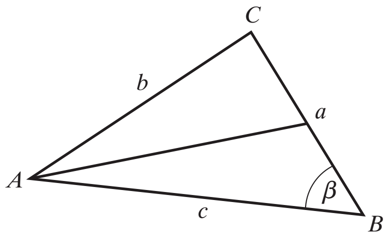
Listopad 2009

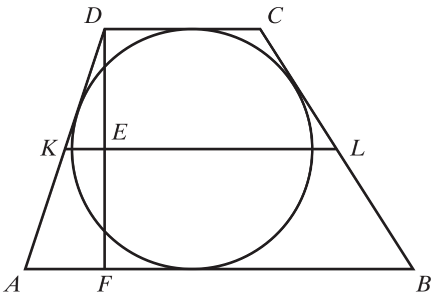
W kluczu są prezentowane przykładowe prawidłowe odpowiedzi. Należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest synonimiczny wobec schematu, oraz inne odpowiedzi, nieprzewidziane w kluczu, ale poprawne.

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 1. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Sprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą.<br>$\begin{cases} 3-\lvert y\rvert=\lvert x\rvert \\ 3=6-2\lvert y\rvert+y \end{cases}$<br>$-2\lvert y\rvert+y=-3$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Obliczenie zmiennej $y$.<br>$y\geqslant 0$ i $-2y+y=-3$ lub $y<0$ i $2y+y=-3$<br>$y=3$ $y=-1$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują niewielkie usterki.<br>Obliczenie zmiennej $x$.<br>$\lvert x\rvert=3-\lvert 3\rvert=0$ lub $\lvert x\rvert=3-\lvert -1\rvert=2$<br>$x=0$ lub $x=2$ lub $x=-2$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>$x=0,\ y=3$ lub $x=2,\ y=-1$ lub $x=-2,\ y=-1$ | 1 |
| 2. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.<br>$(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)+\frac{1}{3}=0$<br>$(1+\sin x)\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=-\frac{1}{3}$ | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Sprowadzenie równania do równania z jedną niewiadomą.<br>$\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{3}$<br>$\frac{\cos^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{3}$<br>$\cos x=-\frac{1}{3}$ | 1 |
| | Pokonane zasadniczych trudności zadania.<br>Uwzględnienie założeń i obliczenie $\sin x$.<br>$\sin^2 x=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$<br>$\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Obliczenie $\sin x+\cos x$.<br>$\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ | 1 |

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Określenie znaku liczby $\sin x + \cos x$.<br>$\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0{,}6 > 0$ | 1 |
| 3. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Zauważenie, że $P = (x, 0)$ i zapisanie odpowiednich równości.<br>$\overrightarrow{PD} = k \cdot \overrightarrow{PB}$<br>$\overrightarrow{PC} = k \cdot \overrightarrow{PA}$<br>$\overrightarrow{PC} = [4 - x, 0]$ i $\overrightarrow{PD} = [6 - x, 2]$<br>$\overrightarrow{PA} = [1 - x, 0]$ i $\overrightarrow{PB} = [2 - x, 1]$ | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Zapisanie równości pozwalających na wyznaczenie $k$ oraz $x$.<br>$k \cdot \overrightarrow{PA} = [k(1 - x), 0]$<br>$k \cdot \overrightarrow{PB} = [k(2 - x), k]$<br>$k(1 - x) = 4 - x$ i $k(2 - x) = 6 - x$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Rozwiązanie układu równań.<br>$k = 2,\ x = -2$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Obliczenie długości promienia okręgu i współrzędnych punktu $P$.<br>$r = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$<br>$P = (-2, 0)$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Zapisanie równania okręgu.<br>$(x+2)^2 + y^2 = 2$ | 1 |
| 4. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Obliczenie $\log 100$ i sprowadzenie logarytmów do tej samej podstawy.<br>$\log_a x + \log_x a \geqslant 2$<br>$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$<br>$\log_a x + \frac{1}{\log_a x} \geqslant 2$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Dokonanie odpowiedniego podstawienia i sprowadzenie nierówności do postaci nierówności kwadratowej.<br>$k = \log_a x$<br>$k + \frac{1}{k} \geqslant 2$<br>$k^2 + 1 \geqslant 2k$, gdyż $k > 0$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia do przekształcenia nierówności.<br>$(k-1)^2 \geqslant 0$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Zauważenie, że dla każdej liczby $k$ spełniającej warunki zadania liczba $(k-1)^2$ jest zawsze nieujemna, zatem $(\log_a x - 1)^2 \geqslant 0$.<br>Nierówność $\log_a x + \log_x a \geqslant 2$ jest zatem prawdziwa. | 1 |

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 5. | Dokonanie istotnego postępu.<br>Zapisanie długości spirali.<br>$L = \pi r + \frac{1}{2}\pi r + .... + \frac{1}{2^9}\pi r$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Zauważenie, że wyrazy sumy tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie $\pi r$. | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Obliczenie sumy ciągu geometrycznego.<br>$l = \pi r \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \pi r \cdot \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}\pi r$ | 1 |
| 6. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Określenie dzielników wyrazu wolnego: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$.<br>Sprawdzenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest liczba $1$. | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Wykonanie dzielenia wielomianu przez dwumian $x-1$ i zapisanie wielomianu w postaci iloczynu.<br>$W(x) = (x-1)(x^3+2x^2-2x-4)$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Rozłożenie wyrażenia $x^3+2x^2-2x-4$ na czynniki.<br>$x^3+2x^2-2x-4 = x^2(x+2) - 2(x+2) = (x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Określenie pierwiastków wielomianu: $1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Obliczenie sumy odwrotności pierwiastków wielomianu.<br>$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ – liczba wymierna | 1 |
| 7. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Zapisanie odpowiedniej równości, wynikającej z faktu, że punkt $A=(x,y)$ leży w tej samej odległości od prostej i punktu $P$.<br>$\sqrt{(0-x)^2+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2} = \frac{\left\|y+\frac{1}{2}\right\|}{\sqrt{0+1^2}}$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Podniesienie obu stron równania do kwadratu i wykonanie redukcji wyrazów podobnych.<br>$x^2-2y=0$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Określenie wzoru odpowiedniej krzywej.<br>$y = \frac{1}{2}x^2$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Zapisanie wzoru funkcji.<br>$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ | 1 |

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 8. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br><br><br>Wykorzystanie wzoru cosinusów.<br>$s$ – długość środkowej<br>$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos\beta$<br>$s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac\cos\beta$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Obliczenie $\cos\beta$.<br>$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$<br>$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Dokonanie odpowiedniego podstawienia i obliczenie $s$.<br>$s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cdot \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$<br>$s^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>$s = 0{,}5\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$ | 1 |
| 9. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Zapisanie sumy cyfr liczby $a$.<br>$a = 24681012...98100$<br>$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 6 + ... + 9 + 8 + 1 + 0 + 0$ | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Pogrupowanie składników w odpowiedni sposób.<br>$S = (2 + 4 + 6 + 8) + \left[(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 5\right] + \left[(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 10\right] +$<br>$+ ... + \left[(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 45\right] + 1$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Obliczenie sumy cyfr z wykorzystaniem wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.<br>$S = \left[20 + (20 + 5) + (20 + 10) + ... + (20 + 45)\right] + 1 =$<br>$= 10 \cdot 20 + (5 + 10 + ... + 45) + 1 = 201 + \frac{5 + 45}{2} \cdot 9 = 426$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Obliczenie sumy cyfr liczby $426$ i stwierdzenie, że jest to liczba podzielna przez $3$, ale niepodzielna przez $9$. | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>Jeśli liczba $a$ byłaby kwadratem pewnej liczby, musiałaby dzielić się przez $3^2 = 9$. Liczba $a$ dzieli się przez $3$, a nie dzieli się przez $9$, nie jest więc kwadratem liczby naturalnej. | 1 |

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| 10. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br>Określenie warunków istnienia dwóch różnych pierwiastków dodatnich.<br>$\begin{cases}\Delta > 0\\ x_1 + x_2 > 0\\ x_1 \cdot x_2 > 0\end{cases}$ | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Określenie, kiedy wyróżnik jest większy od zera<br>$\Delta = k^2 - 9 = (k-3)(k+3)$<br>$\Delta > 0$ dla $k \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Określenie, kiedy suma i iloczyn pierwiastków są większe od zera – wykorzystanie wzorów Viète'a.<br>$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -(k+1) > 0 \Leftrightarrow k < -1$<br>$x_1 \cdot x_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}5(k+5) > 0 \Leftrightarrow k > -5$<br>Stąd $k \in (-5, -1)$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Określenie iloczynu odpowiednich zbiorów.<br>$k \in [(-\infty, -3) \cup (3, \infty)] \cap (-5, -1)$<br>$k \in \left(-5, -3\right)$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>$k \in (-5, -3)$ | 1 |
| 11. | Dokonanie niewielkiego postępu.<br><br><br>Uwzględnienie własności czworokąta opisanego na okręgu.<br>$\lvert AD\rvert + \lvert CB\rvert = \lvert AB\rvert + \lvert CD\rvert$ | 1 |
| | Dokonanie istotnego postępu.<br>Określenie długości odcinka $LK$.<br>$\lvert LK\rvert = \frac{\lvert AB\rvert + \lvert DC\rvert}{2} = \frac{\lvert AD\rvert + \lvert CB\rvert}{2} = 8$ | 1 |
| | Pokonanie zasadniczych trudności zadania.<br>Wykorzystanie zależności między polami odpowiednich czworokątów i bokami czworokąta.<br>$\frac{P}{P_1} = \frac{3}{5}$<br>$\frac{0{,}5\left(8 + \lvert DC\rvert\right) \cdot \lvert DE\rvert}{0{,}5\left(8 + \lvert AB\rvert\right) \cdot \lvert FE\rvert} = \frac{3}{5}$<br>$\lvert DE\rvert = \lvert EF\rvert$ – z twierdzenia Talesa<br>$\lvert AB\rvert + \lvert DC\rvert = 16 \Rightarrow \lvert DC\rvert = 16 - \lvert AB\rvert$ | 1 |

| Numer zadania | Etapy rozwiązywania zadań | Liczba punktów |
|---|---|---|
| | Rozwiązanie części zadania.<br>Obliczenie długości jednej z podstaw.<br>$0{,}5\,(8+\lvert DC\rvert)\cdot\lvert DE\rvert=\frac{3}{5}\cdot 0{,}5\,(8+\lvert AB\rvert)\cdot\lvert FE\rvert$<br>$\frac{16}{5}=\frac{3}{5}\lvert AB\rvert-\lvert DC\rvert$<br>$\frac{16}{5}=\frac{3}{5}\lvert AB\rvert-(16-\lvert AB\rvert)$<br>$\lvert AB\rvert=12$ | 1 |
| | Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki.<br>Obliczenie długości drugiej podstawy.<br>$\lvert CD\rvert=16-12=4$ | 1 |
| | Rozwiązanie bezbłędne.<br>$\lvert AB\rvert=12,\lvert CD\rvert=4$ | 1 |