



# **EGZAMIN MATURALNY OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015**

## **MATEMATYKA POZIOM ROZSZERZONY**

### **PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ (A1)**

W czasie trwania egzaminu zdający może korzystać z zestawu wzorów matematycznych, linijki i cyrkla oraz kalkulatora.

**Czas pracy: 180 minut**

**GRUDZIEŃ 2013**

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1–5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź

### Zadanie 1. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

- A.  $\frac{1}{15}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{7}{15}$                       D.  $\frac{3}{5}$

### Zadanie 2. (0–1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{(\sqrt{2})^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

- A.  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$                       C.  $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$                       D.  $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

### Zadanie 3. (0–1)

Liczba  $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$  jest równa

- A.  $3^{725}$                       B.  $3^{1995}$                       C.  $3^{2015}$                       D.  $3^{2045}$

### Zadanie 4. (0–1)

Okrąg  $o_1$  ma równanie  $x^2 + (y-1)^2 = 25$ , a okrąg  $o_2$  ma równanie  $(x-1)^2 + y^2 = 9$ . Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.  
 B. Te okręgi są styczne.  
 C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg  $o_1$  leży w całości wewnątrz okręgu  $o_2$ .  
 D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg  $o_2$  leży w całości wewnątrz okręgu  $o_1$ .

### Zadanie 5. (0–1)

Dla każdego  $\alpha$  suma  $\sin \alpha + \sin 3\alpha$  jest równa

- A.  $\sin 4\alpha$ .  
 B.  $2 \sin 4\alpha$ .  
 C.  $2 \sin 2\alpha \cos \alpha$ .  
 D.  $2 \sin \alpha \cos 2\alpha$ .

## BRUDNOPIS

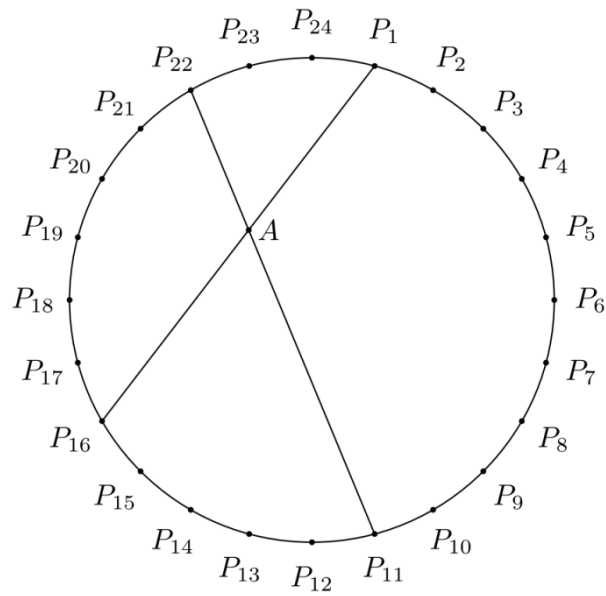




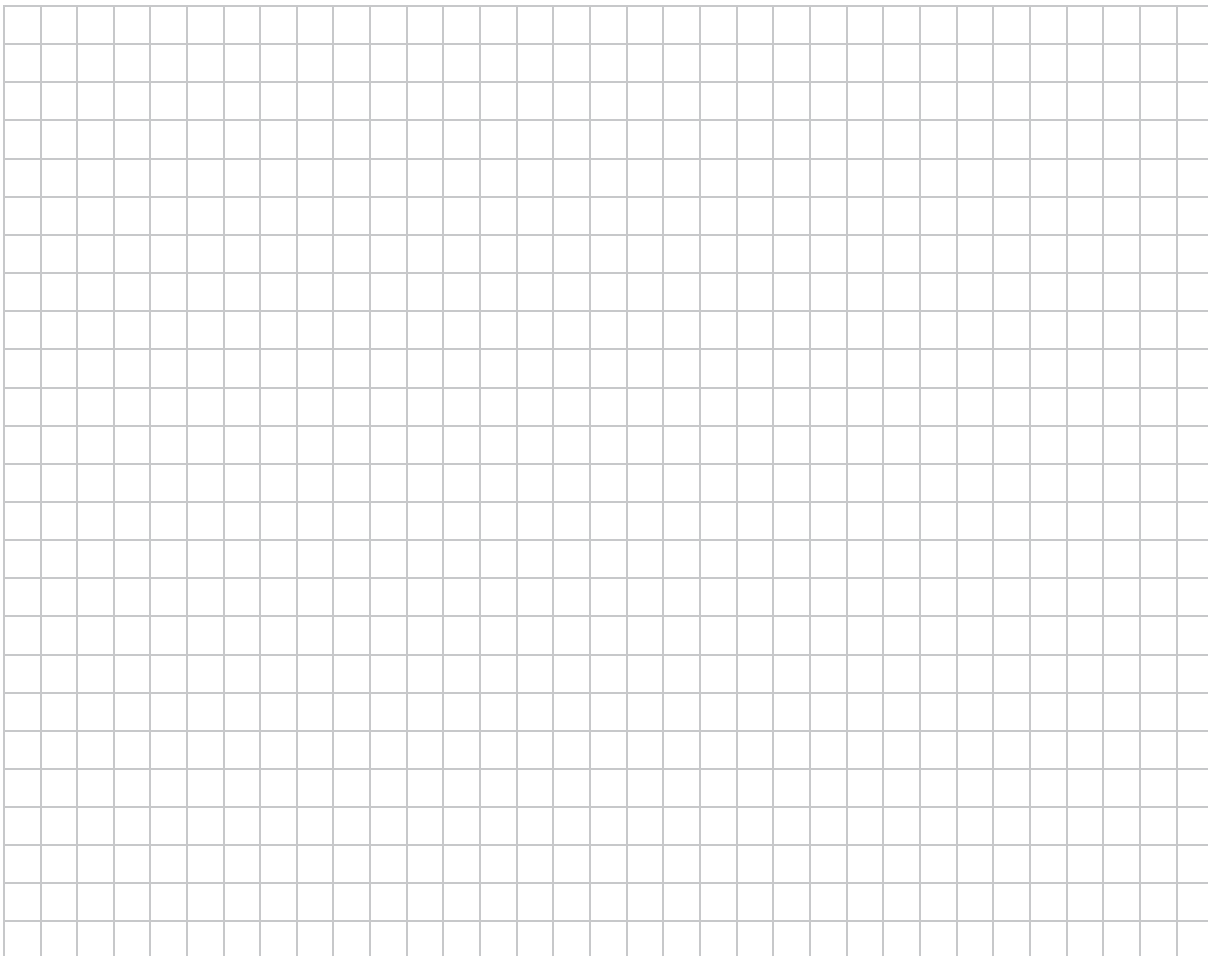


**Zadanie 10. (0–3)**

Punkty  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{23}, P_{24}$  dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt  $A$  jest punktem przecięcia cięciw  $P_{11}P_{22}$  i  $P_1P_{16}$ .



Udowodnij, że  $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60^\circ$ .

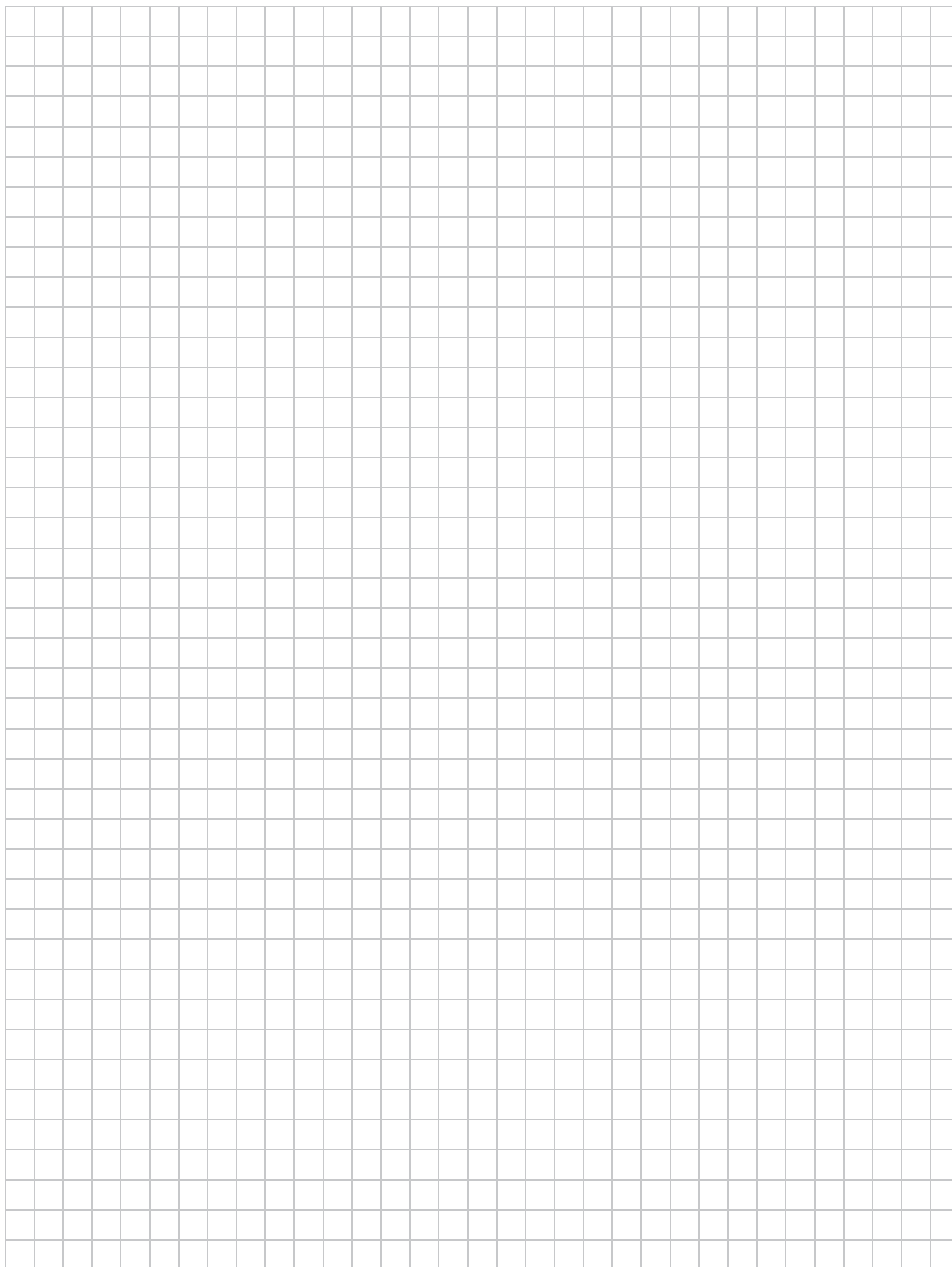




**Zadanie 11. (0–3)**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i każdej liczby rzeczywistej  $m$  prawdziwa jest nierówność

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5.$$





**Zadanie 12. (0–3)**

Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prawdopodobieństwo  $p_k$  otrzymania liczby  $k$  jest dane wzorem:

$$p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}.$$

Rozważamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie  $A$  polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru  $\{1, 3, 5\}$ ,
- zdarzenie  $B$  polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe  $P(A|B)$ .



Odpowiedź: .....

**Zadanie 13. (0–3)**

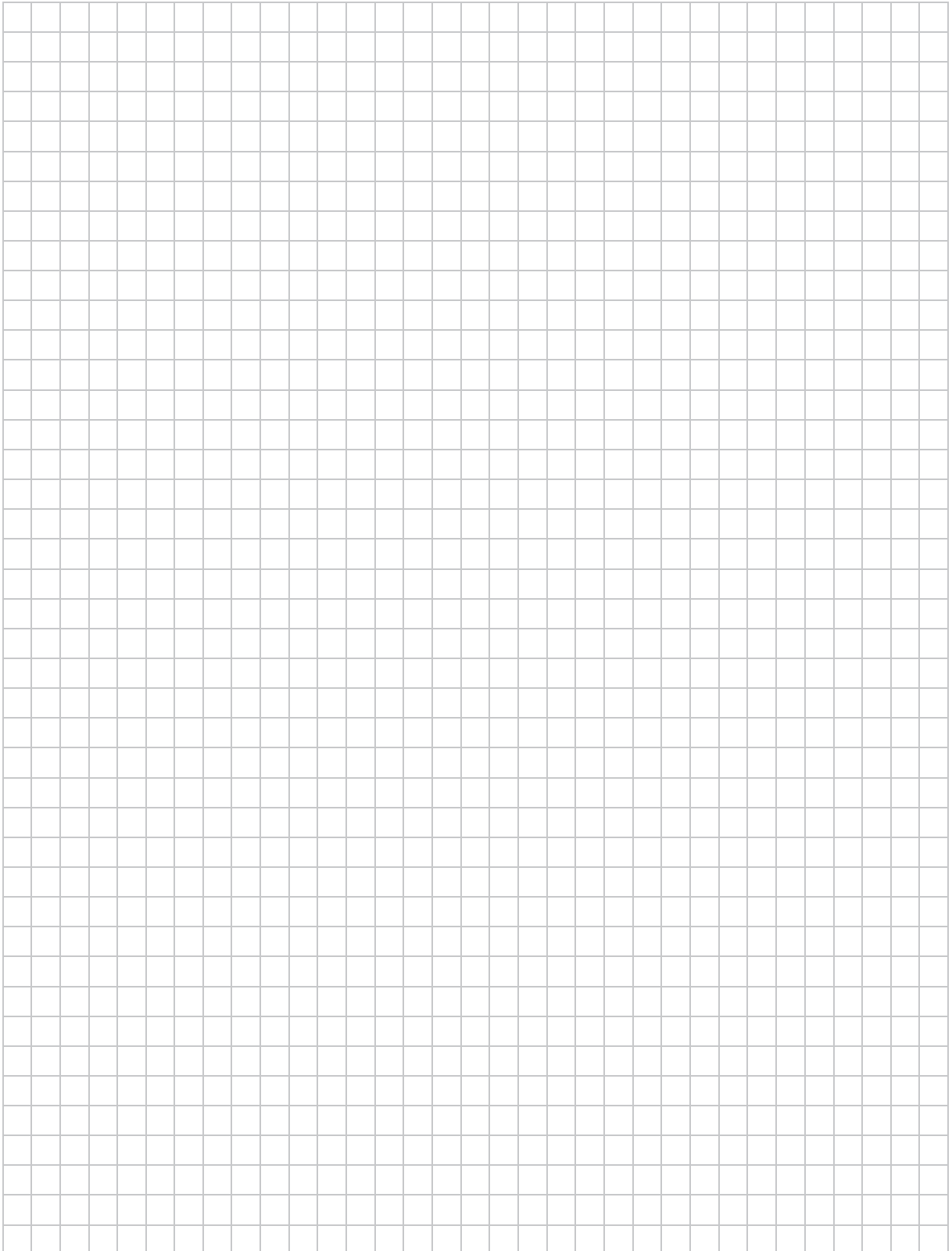
Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których prosta o równaniu  $y = mx + (2m + 3)$  ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie  $S = (0, 0)$  i promieniu  $r = 3$ .



Odpowiedź: .....

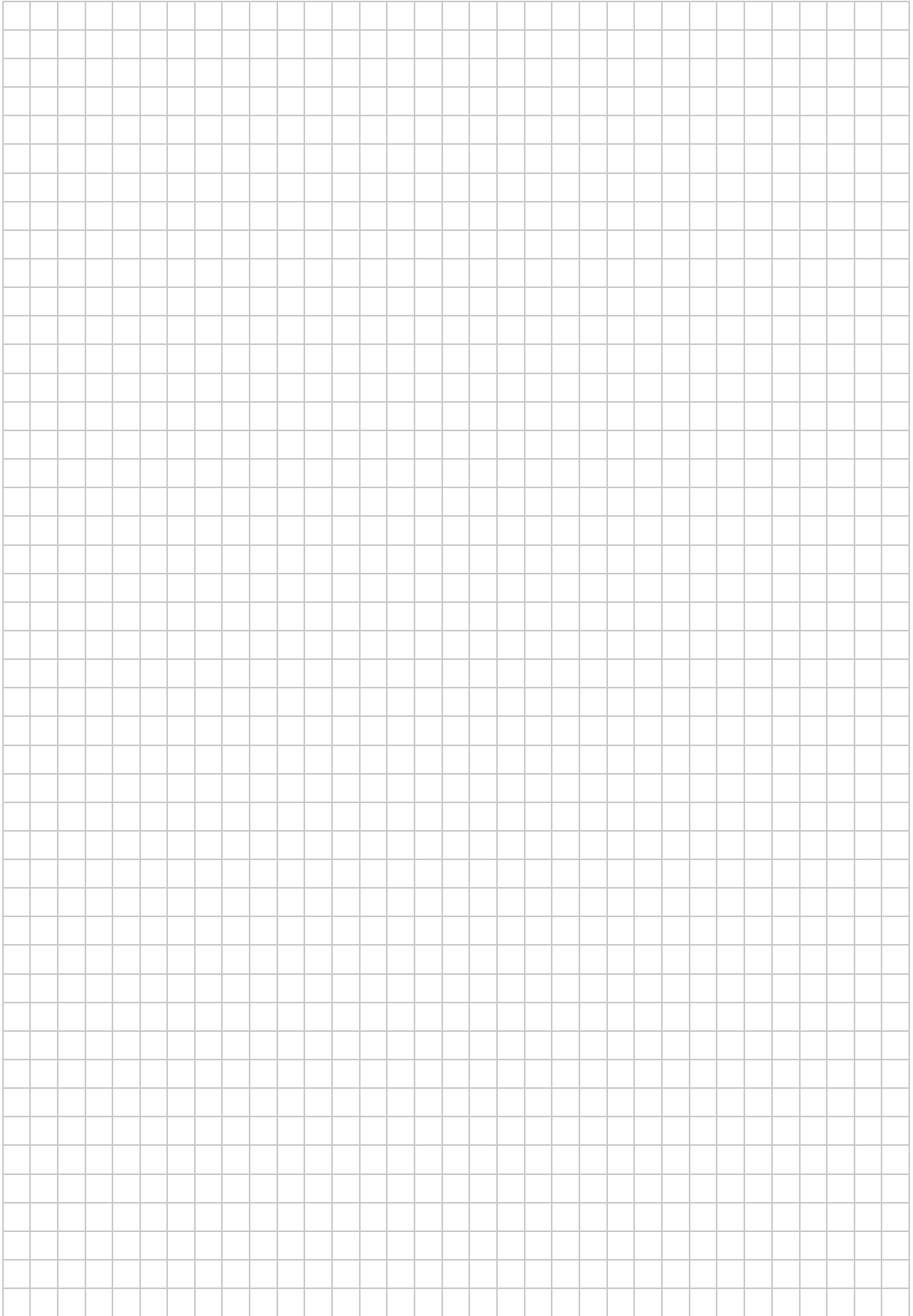
**Zadanie 14. (0–3)**

Dana jest parabola o równaniu  $y = x^2 + 1$  i leżący na niej punkt  $A$  o współrzędnej  $x$  równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie  $A$ .



Odpowiedź: .....

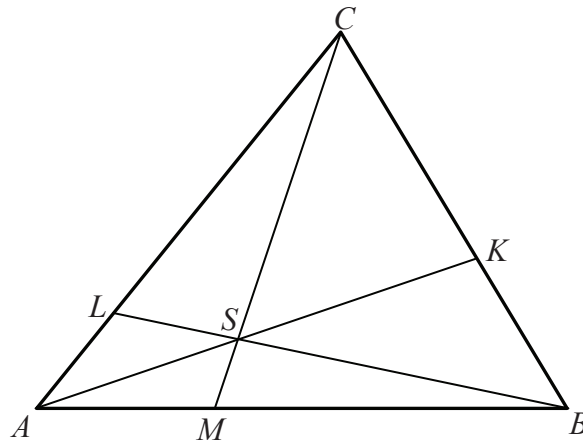




Odpowiedź: .....

**Zadanie 16. (0–6)**

Punkty  $M$  i  $L$  leżą odpowiednio na bokach  $AB$  i  $AC$  trójkąta  $ABC$ , przy czym zachodzą równości  $|MB| = 2 \cdot |AM|$  oraz  $|LC| = 3 \cdot |AL|$ . Punkt  $S$  jest punktem przecięcia odcinków  $BL$  i  $CM$ . Punkt  $K$  jest punktem przecięcia półprostej  $AS$  z odcinkiem  $BC$  (zobacz rysunek).



Pole trójkąta  $ABC$  jest równe 660. Oblicz pola trójkątów:  $AMS$ ,  $ALS$ ,  $BMS$  i  $CLS$ .





Odpowiedź: .....

**Zadanie 17. (0–6)**

Oblicz, ile jest stycyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

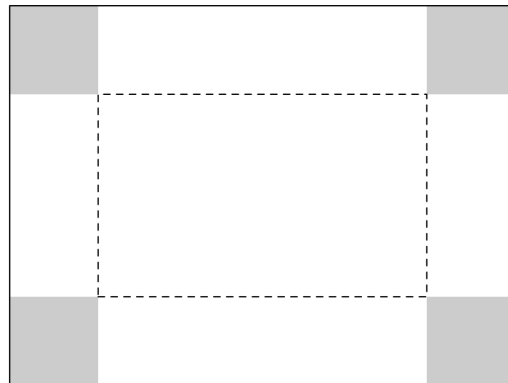


Odpowiedź:.....



**Zadanie 18. (0–7)**

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.





Odpowiedź: .....

## BRUDNOPIS

