

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	B	A	C	A	A	B	A	D	D	C	D	C	B	D	B	C	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. (2pkt)

Rozwiąż nierówność $(x+2) \cdot (2-x) - \frac{(x+2)^2}{2} \leq -\frac{3}{2}x^2$.

Rozwiązanie

Stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów oraz wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$4 - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) \leq -\frac{3}{2}x^2.$$

Przekształcając tę nierówność dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} 4 - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 + \frac{3}{2}x^2 &\leq 0, \\ 2 - 2x &\leq 0, \\ x &\geq 1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $x \in \langle 1, +\infty \rangle$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy poprawnie zastosuje oba wzory skróconego mnożenia zapisując nierówność w postaci np.

$$4 - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) \leq -\frac{3}{2}x^2$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje2 pkt
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1, +\infty \rangle$ lub $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ lub $x \geq 1$.

Zadanie 22. (2 pkt)

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 12x + c$ należy do prostej o równaniu $y = x + 1$. Oblicz wartość współczynnika c .

Rozwiązanie

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-3)} = 2.$$

Drugą współrzędną wierzchołka jest równa

$$y_w = f(x_w) = f(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + c = -12 + 24 + c = 12 + c.$$

Ponieważ wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, więc

$$y_w = x_w + 1$$

czyli

$$12 + c = 2 + 1.$$

Stąd $c = -9$.

Odpowiedź: $c = -9$.

Uwaga

Drugą współrzędną wierzchołka paraboli możemy obliczyć wykorzystując wzór

$$y_w = -\frac{\Delta}{4a}. \text{ Wtedy mamy } y_w = -\frac{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot c}{4 \cdot (-3)} = \frac{144 + 12c}{12} = 12 + c.$$

Możemy również wzór funkcji f zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = -3(x-2)^2 + c + 12$, z której odczytujemy obie współrzędne wierzchołka paraboli $x_w = 2$ i $y_w = 12 + c$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy:

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka i wyznaczy drugą współrzędną w zależności od c , np. $x_w = 2$ i $y_w = 12 + c$

albo

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka i wykorzystując informację, że wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, obliczy drugą współrzędną wierzchołka:

$$x_w = 2 \text{ i } y_w = 3$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy wartość współczynnika c : $c = -9$.

Zadanie 23. (2pkt)

Zapisz wielomian $W(x) = x^3 + 4x^2 - 16x - 64$ w postaci iloczynowej. Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ prawdziwa jest nierówność $W(x) \geq 0$.

Rozwiązanie

Grupując wyrazy możemy wielomian W zapisać w postaci

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 + 4x^2 - 16x - 64 = x^2(x+4) - 16(x+4) = \\ &= (x+4)(x^2 - 16) = (x+4)(x+4)(x-4) = (x+4)^2(x-4). \end{aligned}$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ czynnik $(x+4)^2$ jest dodatni, a czynnik $x-4$ jest nieujemny, więc $(x+4)^2(x-4) \geq 0$, co należało uzasadnić.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze wielomian w postaci

$$W(x) = (x+4)(x+4)(x-4) \text{ lub } W(x) = (x+4)^2(x-4) \text{ lub } W(x) = (x^2 - 16)(x+4).$$

Zdający otrzymuje2 pkt

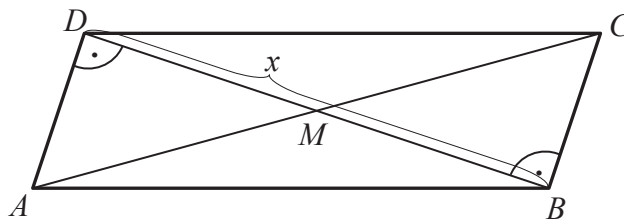
gdy uzasadni, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ prawdziwa jest nierówność $(x+4)^2(x-4) \geq 0$.

Zadanie 24. (2pkt)

Krótsza przekątna równoległoboku jest prostopadła do dwóch przeciwległych jego boków. Długość tej przekątnej jest o 3 cm większa od długości krótszego boku i o 3 cm mniejsza od długości dłuższego boku. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas $|AD| = x - 3$ i $|AB| = x + 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADB otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2,$$

co pozwala napisać równanie

$$(x + 3)^2 = (x - 3)^2 + x^2.$$

Rozwiązując je dostajemy

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 - 6x + 9 + x^2, \\ x^2 &= 12x. \end{aligned}$$

Ponieważ $x > 0$, więc dzieląc obie strony równania przez x mamy

$$x = 12.$$

Zatem $|AD| = 12 - 3 = 9$.

Przekątne równoległoboku połowią się, więc

$$|BM| = |DM| = 6 \text{ oraz } |AM| = |MC|.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADM obliczamy połowę długości przekątnej AC

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= |AD|^2 + |DM|^2, \\ |AM|^2 &= 9^2 + 6^2 = 117. \end{aligned}$$

Stąd

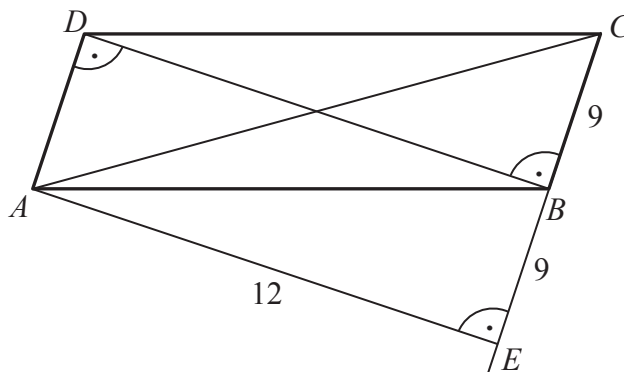
$$|AM| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

Przekątna AC ma zatem długość $6\sqrt{13}$.

Odpowiedź: Długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku jest równa $6\sqrt{13}$.

Uwaga

Długość dłuższej przekątnej równoległoboku możemy też obliczyć inaczej. Poprowadźmy wysokość równoległoboku z wierzchołka A na prostą BC tak, jak na rysunku poniżej.



Czworokąt $AEBD$ jest prostokątem, więc $|AE| = |DB| = 12$ oraz $|EB| = |AD| = 9$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AEC obliczamy długość przekątnej AC

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2,$$

$$|AC|^2 = 12^2 + 18^2 = 468.$$

Stąd

$$|AC| = \sqrt{468} = 6\sqrt{13}.$$

Schemat punktowania

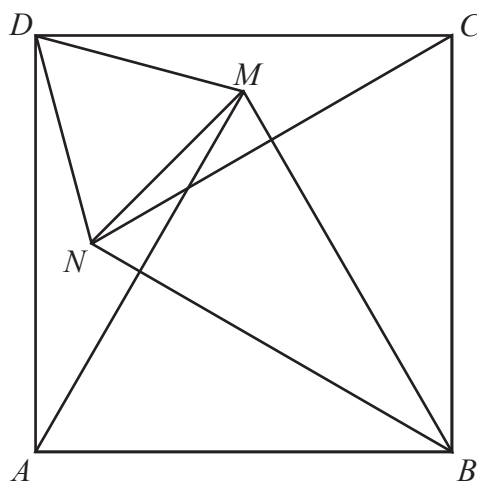
Zdający otrzymuje1 pkt
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą wiążące długości boków równoległoboku i długość krótszej przekątnej, np.:

$$(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość krótszej przekątnej równoległoboku.}$$

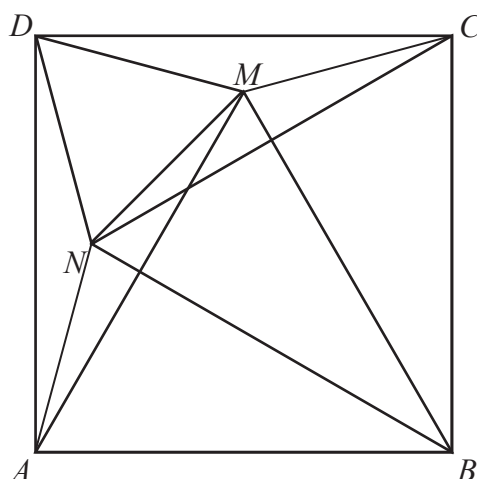
Zdający otrzymuje2 pkt
gdy obliczy długość dłuższej przekątnej równoległoboku: $\sqrt{468} = 6\sqrt{13}$.

Zadanie 25. (2pkt)

Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano takie punkty M i N , że trójkąty ABM i BCN są równoboczne (zobacz rysunek). Udowodnij, że trójkąt DNM jest równoboczny.



Dowód



Ponieważ $|AD| = |AM| = |AB| = |BN| = |BM| = |BC| = |CN| = |CD|$, więc trójkąty DAM , NBM i NCD są równoramienne. Pokażemy, że są to trójkąty przystające.

Ponieważ $|\sphericalangle DAB| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle MAB| = 60^\circ$, więc $|\sphericalangle DAM| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Tak samo wykazujemy, że $|\sphericalangle ABN| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle NBC| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABM| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$|\sphericalangle NCD| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle BCN| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Teraz możemy obliczyć miarę kąta NBM

$$|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABN| - |\sphericalangle MBC| = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Pokazaliśmy zatem, że w każdym z trójkątów DAM , NBM i NCD dwa boki mają tę samą długość i kąt między tymi bokami ma tę samą miarę 30° . Stąd wynika (cecha bok-kąt-bok), że są to trójkąty przystające. Z przystawania tych trójkątów wynika z kolei równość $|DM| = |MN| = |ND|$, co oznacza, że trójkąt DMN jest równoboczny. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze, że trójkąty DAM , NBM i NCD są przystające i nie uzasadni tego przystawania oraz wywnioskuje, że trójkąt DMN jest równoboczny.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy udowodni, że trójkąt DMN jest równoboczny.

Zadanie 26. (2pkt)

Pierwszy odcinek łamanej ma długość 128 cm, a długość każdego następnego jej odcinka jest o 25% mniejsza od długości poprzedniego. Najkrótszy odcinek tej łamanej ma długość 40,5 cm. Oblicz, z ilu odcinków składa się ta łamana.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a_n długość n -tego odcinka łamanej. Ponieważ każdy kolejny odcinek

łamanej jest o 25% krótszy od poprzedniego, więc $a_{n+1} = a_n - 25\%a_n = \frac{3}{4}a_n$. Oznacza to, że

długości kolejnych odcinków łamanej tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{3}{4}$.

Ponieważ $a_1 = 128$, $a_n = 40\frac{1}{2}$, więc ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ na n -ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$40\frac{1}{2} = 128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Stąd mamy

$$\frac{81}{2} = 128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},$$

$$\frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Zatem $n-1 = 4$, czyli $n = 5$.

Odpowiedź: Łamana składa się z pięciu odcinków.

Uwaga

Możemy po kolei obliczać długości kolejnych odcinków łamanej. Wtedy drugi odcinek ma

długość $128 - 25\% \cdot 128 = \frac{3}{4} \cdot 128 = 96$, trzeci $96 - 25\% \cdot 96 = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72$, czwarty

$72 - 25\% \cdot 72 = \frac{3}{4} \cdot 72 = 54$, piąty $54 - 25\% \cdot 54 = \frac{3}{4} \cdot 54 = \frac{81}{2} = 40,5$. Kolejne odcinki są coraz

krótsze, więc łamana składa się z pięciu odcinków.

Schemat punktowania**Zdający otrzymuje1 pkt**

gdy zapisze, że długości kolejnych odcinków łamanej tworzą ciąg geometryczny o ilorazie

$$q = \frac{3}{4}.$$

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy liczbę odcinków łamanej.

Zadanie 27. (4pkt)

Ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn wylosowanych liczb będzie podzielny przez 6 lub przez 10.

RozwiązaniePierwszy sposób

Możemy przyjąć, że zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para liczb (x, y) taka, że $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $x \neq y$. Wówczas mamy do czynienia z modelem klasycznym, w którym

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), \\ & (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), \\ & (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), \\ & (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (5,7), (5,8), \\ & (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,7), (6,8), \\ & (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,8), \\ & (8,2), (8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7) \} \end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy taką parę liczb, że ich iloczyn będzie podzielny przez 6 lub przez 10. Wypiszmy wszystkie takie pary ze zbioru Ω . Zatem

$$\begin{aligned} A = \{ & (2,3), \quad (2,5), (2,6), \\ & (3,2), (3,4), \quad (3,6), \quad (3,8), \\ & \quad (4,3), (4,5), (4,6), \\ & (5,2), \quad (5,4), (5,6), \quad (5,8), \\ & (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,7), (6,8), \\ & \quad (7,6), \\ & (8,3), \quad (8,5), (8,6), \quad \} \end{aligned}$$

Tych par jest 24, czyli $|A| = 24$.

Prawdopodobieństwa zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6 lub przez 10 jest równe $\frac{4}{7}$.

Uwaga

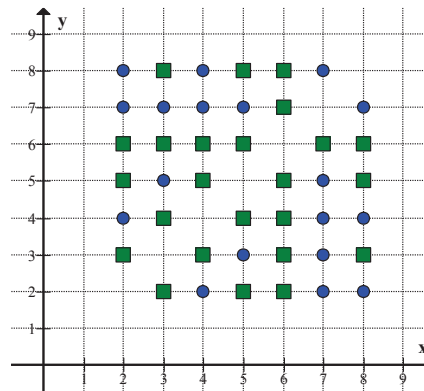
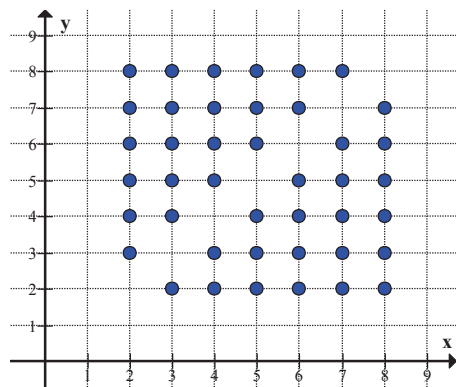
Możemy również zdarzenia wszystkie zdarzenia elementarne potraktować jako pola odpowiedniej tabeli (lewa tabela).

	2	3	4	5	6	7	8
2	X						
3		X					
4			X				
5				X			
6					X		
7						X	
8							X

	2	3	4	5	6	7	8
2	X	6	8	10	12	14	16
3	6	X	12	15	18	21	24
4	8	12	X	20	24	28	32
5	10	15	20	X	30	35	40
6	12	18	24	30	X	42	48
7	14	21	28	35	42	X	56
8	16	24	32	40	48	56	X

W pola tej tabeli możemy wpisać odpowiednie iloczyny. W ten sposób od razu „widzimy” zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (prawa tabela).

Możemy też zaznaczyć w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie wszystkie zdarzenia elementarne (lewy rysunek) oraz zaznaczyć na tym rysunku te, które sprzyjają zdarzeniu A (prawy rysunek)



Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Wypisanie co najmniej 13 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , przy czym wśród wypisanych par nie może być żadnej pary nie sprzyjającej zdarzeniu A .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 24$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{4}{7}$.

Drugi sposób

Możemy przyjąć, że zdarzeniem elementarnym, jest dwuelementowy podzbiór $\{x, y\}$ zbioru siedmioelementowego $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Wówczas mamy do czynienia z modelem klasycznym, w którym

$$\Omega = \{\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{2,8\}, \\ \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{3,8\}, \\ \{4,5\}, \{4,6\}, \{4,7\}, \{4,8\}, \\ \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \\ \{6,7\}, \{6,8\}, \\ \{7,8\}\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 21$.

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy takie liczby, że ich iloczyn będzie podzielny przez 6 lub przez 10. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A . Wtedy

$$A = \{\{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,8\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}\}.$$

Mamy 4 takie zdarzenia, czyli $|A| = 12$.

Prawdopodobieństwa zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6 lub przez 10 jest równe $\frac{4}{7}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 21$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Wypisanie co najmniej 7 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , przy czym wśród wypisanych zdarzeń elementarnych nie może być żadnego nie sprzyjającego zdarzeniu A .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 12$.

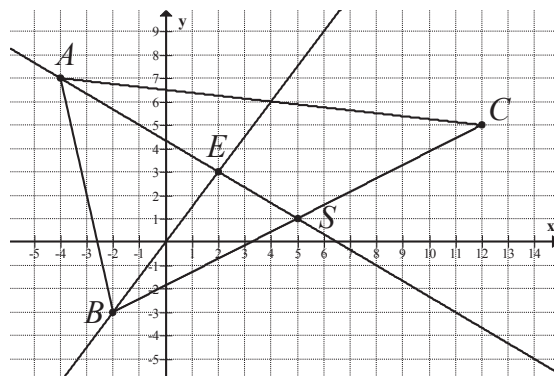
Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{4}{7}$.

Zadanie 28. (5pkt)

Wierzchołki trójkąta ABC mają współrzędne: $A = (-4, 7)$, $B = (-2, -3)$ i $C = (12, 5)$. Punkt S jest środkiem boku BC . Prosta AS przecina prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez punkt B w punkcie E . Oblicz współrzędne punktu E i długość odcinka SE .

Rozwiązanie



Obliczmy najpierw współrzędne środka S odcinka BC

$$S = \left(\frac{-2+12}{2}, \frac{-3+5}{2} \right) = (5, 1).$$

Wyznaczmy równanie prostej AS wykorzystując wzór $(y - y_A)(x_S - x_A) - (y_S - y_A)(x - x_A) = 0$:

$$(y - 7)(5 + 4) - (1 - 7)(x + 4) = 0,$$

$$9(y - 7) + 6(x + 4) = 0,$$

$$2x + 3y - 13 = 0,$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Prosta prostopadła do prostej AS i przechodząca przez punkt B ma więc równanie

$$y = \frac{3}{2}(x + 2) - 3,$$

$$y = \frac{3}{2}x.$$

Współrzędne punktu E obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3} \end{cases}$$

Porównując prawe strony równań dostajemy równanie

$$\frac{3}{2}x = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3},$$

$$9x = -4x + 26,$$

$$13x = 26,$$

$$x = 2.$$

Stąd

$$y = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Zatem $E = (2, 3)$.

Pozostaje jeszcze obliczyć długość odcinka SE

$$|SE| = \sqrt{(x_E - x_S)^2 + (y_E - y_S)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}.$$

Odpowiedź. $E = (2, 3)$, $|SE| = \sqrt{13}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu S : $S = (5, 1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Wyznaczenie równania prostej AS , np. w postaci: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Wyznaczenie równania prostej BE , np. w postaci: $y = \frac{3}{2}x$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu E : $E = (2, 3)$.

Rozwiązanie pełne5 pkt

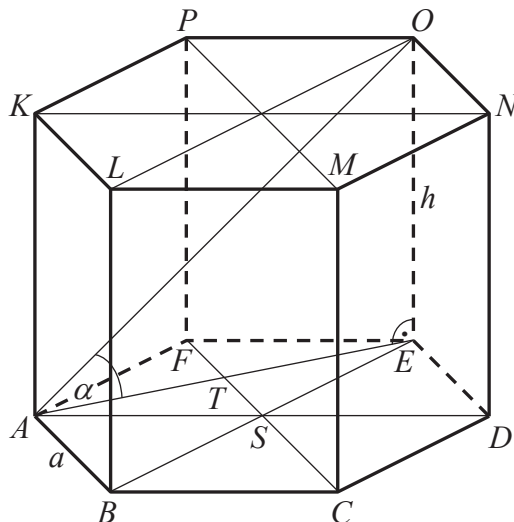
Obliczenie długości odcinka SE : $|SE| = \sqrt{13}$.

Zadanie 29. (4pkt)

Pole powierzchni całkowitej graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego (zobacz rysunek) jest równe $60\sqrt{3}$. Krótsza przekątna tego graniastoslupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zaznaczmy kąt α między krótszą przekątną AO graniastoslupa a płaszczyzną jego podstawy.



Podstawa graniastoslupa jest złożona z sześciu przystających trójkątów równobocznych o boku długości a . Odcinki AT i TE to wysokości dwóch z tych trójkątów. Zatem

$$|AE| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trójkąt AOE jest prostokątny. Zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OE|}{|AE|} = \frac{h}{a\sqrt{3}}.$$

Ponieważ wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$, więc

$$\begin{aligned} \frac{h}{a\sqrt{3}} &= 2, \\ h &= 2a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pole powierzchni całkowitej graniastoslupa jest równe $60\sqrt{3}$, ale

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 3a^2\sqrt{3} + 6ah,$$

więc

$$\begin{aligned} 3a^2\sqrt{3} + 6ah &= 60\sqrt{3}, \\ a^2\sqrt{3} + 2ah &= 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Wykorzystując wcześniej otrzymaną zależność między a i h otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} a^2\sqrt{3} + 2a \cdot 2a\sqrt{3} &= 20\sqrt{3}, \\ 5a^2\sqrt{3} &= 20\sqrt{3}, \\ a^2 &= 4. \end{aligned}$$

Stąd $a = 2$.

Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa jest równa 2.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zaznaczenie kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy i zapisanie jednej z zależności między długością podstawy oraz wysokością graniastosłupa, np.:

$$\frac{h}{a\sqrt{3}} = 2 \text{ lub } 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 60\sqrt{3} \text{ lub } \left(\frac{h}{p} = 2 \text{ i } p = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)$$

Uwaga

Zdający nie musi zaznaczać tego kąta, o ile przyjmie oznaczenia potrzebnych mu długości odcinków, opíše te oznaczenia, a z dalszego toku rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje kąt nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie układu równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 60\sqrt{3} \text{ i } h = 2a\sqrt{3}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$a^2\sqrt{3} + 2a \cdot 2a\sqrt{3} = 20\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie bezbłędne4 pkt

Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 2$.

Zadanie 30. (5pkt)

Do zbiornika o pojemności 800 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 32 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 12 godzin i 30 minut krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

RozwiązaniePierwszy sposób

Oznaczmy przez t czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko pierwszą rurą.

Wtedy czas, w jakim napełniony zostałby pusty zbiornik, gdyby woda doprowadzana była do niego tylko drugą rurą byłby równy $(t + 12\frac{1}{2})$ godziny.

Ponieważ pojemność zbiornika jest równa 800 m^3 , więc w ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t} \text{ m}^3$, a druga $\frac{800}{t + 12\frac{1}{2}} \text{ m}^3$ wody. Pierwsza rura w ciągu godziny dostarcza o

32 m^3 więcej wody niż druga rura

$$\frac{800}{t} = \frac{800}{t + 12\frac{1}{2}} + 32.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez 32 mamy

$$\frac{25}{t} = \frac{25}{t + 12\frac{1}{2}} + 1.$$

Mnożąc teraz obie strony tego równania przez $t(t + 12\frac{1}{2})$, a następnie przekształcając je równoważnie, dostajemy kolejno

$$25(t + 12\frac{1}{2}) = 25t + t(t + 12\frac{1}{2}),$$

$$25t + \frac{625}{2} = 25t + t^2 + \frac{25}{2}t,$$

$$t^2 + \frac{25}{2}t - \frac{625}{2} = 0,$$

$$2t^2 + 25t - 625 = 0.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe obliczając kolejno jego wyróżnik i pierwiastki

$$\Delta = 25^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-625) = 625 + 8 \cdot 625 = 9 \cdot 625, \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 \cdot 625} = 3 \cdot 25 = 75$$

$$t = \frac{-25 - 75}{2 \cdot 2} = -25 \text{ lub } t = \frac{-25 + 75}{2 \cdot 2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania (czas nie może być liczbą ujemną).

Gdy $t = 12\frac{1}{2}$, to wtedy w ciągu godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t} = \frac{800}{12\frac{1}{2}} = 64 \text{ m}^3$ wody,

a druga $\frac{800}{t + 12\frac{1}{2}} = \frac{800}{25} = 32 \text{ m}^3$, więc obie rury w ciągu godziny dostarczają $64 + 32 = 96 \text{ m}^3$

wody. Stąd czas, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie

doprowadzana przez obie rury jednocześnie jest równy $\frac{800}{96} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ godziny, czyli

8 godzin i 20 minut.

Schemat punktowania pierwszego sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez jedną z rur i wydajnością tej rury, np.:

W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t} \text{ m}^3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez drugą z rur i wydajnością tej rury, np.:

W ciągu jednej godziny druga rura dostarcza $\frac{800}{t + 12\frac{1}{2}} \text{ m}^3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\frac{800}{t} = \frac{800}{t + 12\frac{1}{2}} + 32.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

$$2t^2 + 25t - 625 = 0.$$

Rozwiązanie bezbłędne5 pkt

Obliczenie czasu, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, gdy woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie: 8 godzin i 20.

Drugi sposób

Oznaczmy przez t czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko pierwszą rurą, natomiast przez v oznaczmy ilość wody w m^3 dostarczanej do zbiornika tą rurą. Wtedy czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko drugą rurą jest równy $(t + 12\frac{1}{2})$ godziny, natomiast w ciągu godziny druga rura dostarcza $(v - 32) m^3$ wody.

Pojemność zbiornika jest równa $800 m^3$, więc otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} vt = 800 \\ (v - 32)(t + 12\frac{1}{2}) = 800 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ

$$\begin{cases} vt = 800 \\ vt + 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ 800 + 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ t = \frac{25}{64}v - \frac{25}{2} \end{cases}$$

Stąd

$$v\left(\frac{25}{64}v - \frac{25}{2}\right) = 800,$$

$$\frac{25}{64}v^2 - \frac{25}{2}v - 800 = 0.$$

Mnożąc obie strony równania przez $\frac{64}{25}$ otrzymujemy równanie

$$v^2 - 32v - 64 \cdot 32 = 0.$$

Możemy je rozwiązać np. metodą grupowania

$$v^2 - 64v + 32v - 64 \cdot 32 = 0,$$

$$v(v - 64) + 32(v - 64) = 0,$$

$$(v + 32)(v - 64) = 0.$$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że $v > 0$, więc czynnik $v + 32$ jest dodatni.

Stąd $v = 64$. Wtedy druga rura w ciągu godziny dostarcza $v - 32 = 64 - 32 = 32 m^3$ wody, więc obie jednocześnie dostarczają w ciągu godziny $64 + 32 = 96 m^3$ wody.

Czas, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez

obie rury jednocześnie jest zatem równy $\frac{800}{96} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ godziny, czyli 8 godzin i 20 minut.

Schemat punktowania drugiego sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez jedną z rur i wydajnością tej rury, np.:

$$vt = 800 \quad \text{lub} \quad (v - 32)(t + 12\frac{1}{2}) = 800.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\begin{cases} vt = 800 \\ (v - 32)(t + 12\frac{1}{2}) = 800 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$v\left(\frac{25}{64}v - \frac{25}{2}\right) = 800.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

$$v^2 - 32v - 64 \cdot 32 = 0.$$

Rozwiązanie bezbłędne5 pkt

Obliczenie czasu, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, gdy woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie: 8 godzin i 20 minut.